الرياضيات البحتة

الجزء الخاص بالإجابات

القسم العلمى

الفصل الدراسى الأول

Made By Ahmed Magdy



المعاصر

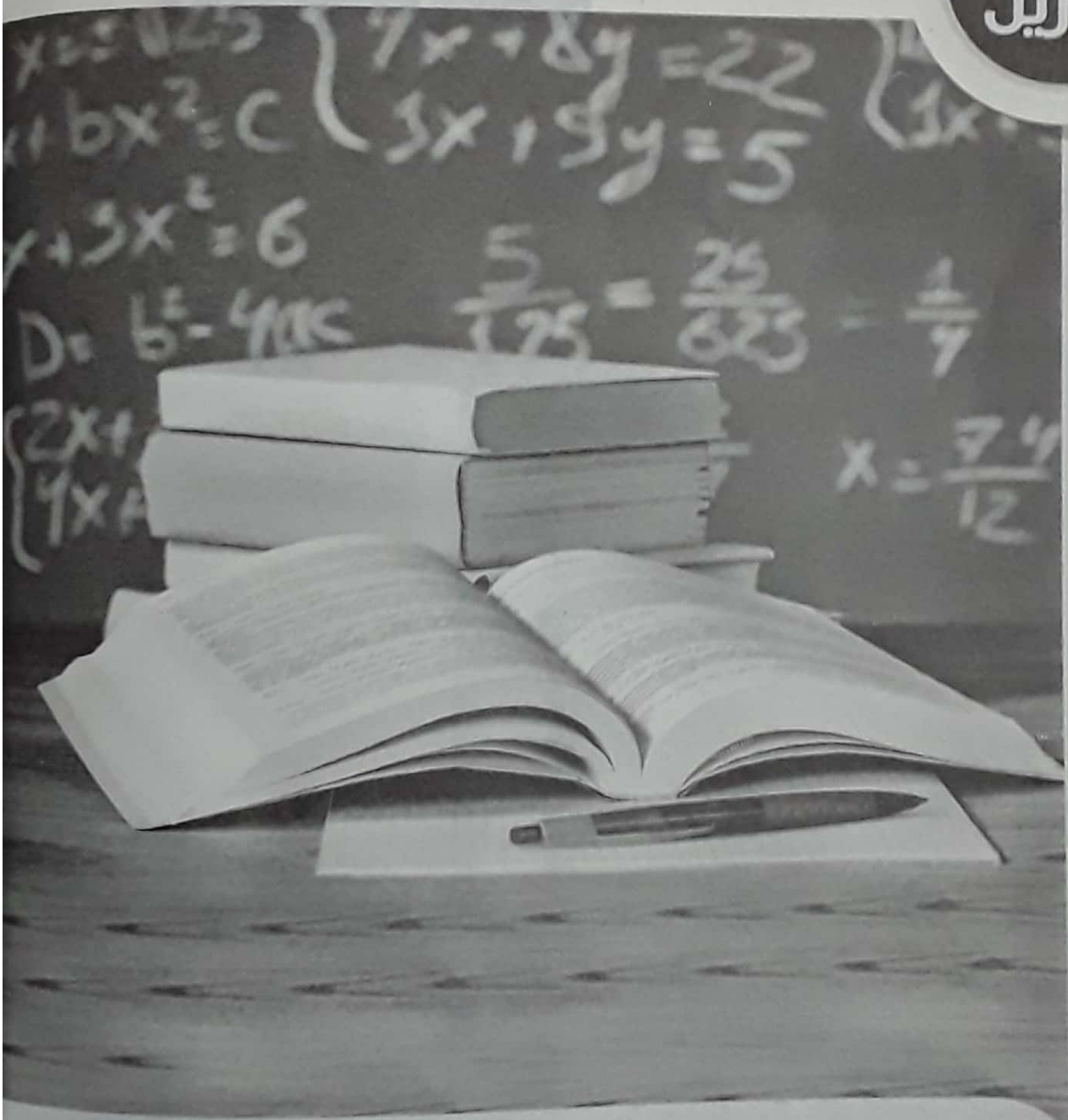
إعداد نخبة من خبراء التعليم

2 ثانوى

2020

إجابات تمارين

الجبر



إجابات الوحدة الأولى

إجابات تمارين المتطلبات القبلية

١

① (د) ② (ب) ③ (د) ④ (جـ) ⑤ (جـ)
⑥ (أ) ⑦ (جـ) ⑧ (جـ)

٢

∵ د (س) = أ٢ س٢ + ١٠ أ س + ٢٥

، ر (س) = ٩ س٢ + ٣٠ س + حـ − ٤

، ∴ د (س) = ر (س)

∴ ١٠ أ = ٣٠ ∴ أ = ٣

، حـ − ٤ = ٢٥ ∴ حـ = ٢٩

٣

① ∴ أ + ب = ٥ (١) ، أ + حـ = ٣ (٢)

، ب = −٢ وبالتعويض عن قيمة ب فى (١)

∴ أ − ٢ = ٥

∴ أ = ٧ وبالتعويض عن قيمة أ فى (٢)

∴ ٧ + حـ = ٣ ∴ حـ = −٤

② ∴ أ + ب = ١ (١) ، أ + حـ = ٠ (٢)

، ب = −٢ ∴ أ − ٢ = ١ ∴ أ = ٣

، ٣ + حـ = ٠ ∴ حـ = −٣

③ ∴ أ + ٢ ب = ٧ (١)

، − حـ = ٥ ∴ حـ = −٥ ، أ − ب = ٤ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ ب = ١ ، أ = ٥

إجابات تمارين 1

١

① دالة ② ليست دالة ③ دالة
④ ليست دالة ⑤ دالة ⑥ ليست دالة
⑦ دالة ⑧ ليست دالة ⑨ دالة
⑩ دالة

٢

① دالة ② ليست دالة ③ ليست دالة
④ دالة ⑤ ليست دالة ⑥ دالة

٣

① ع − {٢} ② ع − {−٣ ، ٣}
③ ع − {١ ، ٢} ④ ع − {٠ ، −٤}
⑤ ع − {٠} ⑥ ع
⑦ ع − {٠ ، ١ ، −١} ⑧ ع − {٣}
⑨ ع − {١ ، $\frac{-٢}{٣}$} ⑩ ع − {−١}

٤

① [٣ ، ∞[②]−∞ ، ٢] ③ ع
④ ع ⑤ ع − {$\frac{٥}{٢}$} ⑥]٣ ، ∞[
⑦]−∞ ، ١[⑧ ع −]−٤ ، ٤[
⑨ [−٢ ، ٢] ⑩]−٣ ، ٣[⑪ ع
⑫ ع − [−١ ، ٦] ⑬ ع − {٢}
⑭ [٠ ، ∞[− {١}

٥

① ع − {٢} ② ع ③ [٠ ، ٢]
④]−∞ ، ٤] ⑤ [٠ ، ٦]

٦

① (جـ) ② (د) ③ (جـ) ④ (ب)

٧

① المجال = ع ، المدى = {٢}
، الدالة ثابتة على مجالها ع

② المجال = ع ، المدى = {−٢ ، ٣}
، الدالة ثابتة فى]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

③ المجال = ع − {٠} ، المدى = ع − [−٢ ، ٢]
، الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

④ المجال = ع − {١} ، المدى =]−٢ ، ∞[
، الدالة تناقصية فى]−∞ ، ١[
، تزايدية فى]١ ، ∞[

⑤ المجال = ع − {٢} ، والمدى = ع − {٢}
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

⑥ المجال = [٠ ، ∞[، المدى = [٠ ، ٤]
، الدالة تزايدية فى]٠ ، ٢[، ثابتة فى]٢ ، ∞[

⑦ المجال = ع − {−١ ، ٢} ، المدى = {٣}
، الدالة ثابتة على مجالها.

⑧ المجال = [−٣ ، ٤] ، المدى = [٠ ، ٤]
، الدالة تزايدية فى]−٣ ، −٢[
، وثابتة فى]−٢ ، ١[وتناقصية فى]١ ، ٤[

⑨ المجال = ع −]٠ ، ١]
، المدى =]٢ ، ∞[∪ {٢} ، الدالة ثابتة فى]−∞ ، ٠[وتزايدية فى]١ ، ∞[

⑩ المجال = ع ، المدى =]−∞ ، ٢]
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٠[،]٢ ، ٣[
وتناقصية فى]٠ ، ٢[وثابتة فى]٣ ، ∞[

⑪ المجال = ع ، المدى =]−∞ ، ٤]
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، −٢[،]٠ ، ٢[
وتناقصية فى]−٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[

⑫ المجال = ع − {٠} ، المدى = ع
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

⑬ المجال = ع ، المدى = ع −]١ ، ٢]
، الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠[،]١ ، ∞[
وتزايدية فى]٠ ، ١[

⑭ المجال = ع − {٠} ، المدى = ع − [−٢ ، ٢]
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

⑮ المجال = [−٢ ، ∞[، المدى = [٠ ، ∞[
، الدالة تزايدية فى]−٢ ، ٠[
وتناقصية فى]٠ ، ٢[،]٢ ، ∞[

٨

① (د) ② (د) ③ (د) ④ (جـ)
⑤ (أ) ⑥ (د)

ارشادات لحل رقم ٨

① ∵ س تدل على عدد أضلاع مضلع
∴ س تكون عدد صحيح أكبر من ٢
∴ المجال = ص+ − {١ ، ٢}

② بوضع $\sqrt[3]{س}$ − ٢ = ٠
∴ $\sqrt[3]{س}$ = ٢ ∴ س = ٨
∴ المجال = ع − {٨}

③ ∵ ٢ س ≥ ٠ ∴ س ≥ ٠
∴ س ∈ [٠ ، ∞[
بوضع $\sqrt{٢ س}$ − س = ٠ ∴ $\sqrt{٢ س}$ = س
∴ ٢ س = س٢ ∴ س٢ − ٢ س = ٠
∴ س (س − ٢) = ٠

∴ س = ٠ أو س = ٢

∴ المجال =]٠ ، ∞[- {٢}

④ ∵ س - ١ ≥ ٠   ∴ س ≥ ١

∴ س ∈ [١ ، ∞[

وبوضع √(س - ١) = ٣   ∴ س - ١ = ٩

∴ س = ١٠

∴ المجال = [١ ، ∞[- {١٠}

⑤ ∵ س - ١ ≥ ٠   ∴ س ≥ ١

∴ س ∈ [١ ، ∞[

وبوضع √(س - ١) + ٢ = ٠ (تعارض)

∴ المجال = [١ ، ∞[

⑥ د (س) = √(- (س^{٢} - ٦ س + ٩))

= √(- (س - ٣)^{٢})

∴ - (س - ٣)^{٢} ≥ ٠   ∴ (س - ٣)^{٢} ≤ ٠

وهذا لا يتحقق إلا فى حالة التساوى فقط

أى عندما س = ٣   ∴ المجال = {٣}

إجابات تمارين 2

١

① (د + ر) (س) = س^{٢} - ١٦

، المجال = [-٤ ، ٨] ∩ [-٧ ، ٤] = [-٤ ، ٤]

② (د - ر) (س) = س^{٢} - ٢ س - ٨

، المجال = [-٤ ، ٤]

③ (د . ر) (س) = (س - ٤) (س^{٢} - س - ١٢)

، المجال = [-٤ ، ٤]

④ (د/ر) (س) = (س^{٢} - س - ١٢) / (س - ٤)

= (س - ٤) (س + ٣) / (س - ٤) = س + ٣

، المجال = [-٤ ، ٤[

⑤ (ر/د) (س) = (س - ٤) / ((س - ٤) (س + ٣)) = ١ / (س + ٣)

، المجال = [-٤ ، ٤[- {-٣}

٢

د (س) = س^{٢} - ٤ ومجال د = ح

، ر (س) = √(س - ١) ومجال ر = [١ ، ∞[

∴ المجال المشترك = [١ ، ∞[

① (د + ر) (س) = س^{٢} - ٤ + √(س - ١)

، المجال = [١ ، ∞[

، (د . ر) (س) = (س^{٢} - ٤) (√(س - ١))

، المجال = [١ ، ∞[

، (د/ر) (س) = (س^{٢} - ٤) / √(س - ١) ، المجال =]١ ، ∞[

، (ر/د) (س) = √(س - ١) / (س^{٢} - ٤)

، المجال = [١ ، ∞[- {٢}

② (د + ر) (٥) = ٥^{٢} - ٤ + √(٥ - ١) = ٢٣

، (د . ر) (٢) = (٢^{٢} - ٤) (√(٢ - ١)) = صفر

، (د/ر) (٣) = (٣^{٢} - ٤) / √(٣ - ١) = ٥√٢ / ٢

، (ر/د) (-٢) غير معرفة

لأن -٢ ∉ المجال

٣

أولاً :

① (د + ر) (س) = س^{٢} - ٤ س + √(س + ٢)

، المجال = ح ∩ [-٢ ، ∞[= [-٢ ، ∞[

② (ر - ع) (س) = √(س + ٢) - √(٤ - س)

، المجال = [-٢ ، ∞[∩]-∞ ، ٤] = [-٢ ، ٤]

③ (د . ع) (س) = (س^{٢} - ٤ س) (√(٤ - س))

، المجال = ح ∩]-∞ ، ٤] =]-∞ ، ٤]

④ (ع/د) (س) = √(٤ - س) / (س^{٢} - ٤ س) = √(٤ - س) / (س (س - ٤))

، المجال =]-∞ ، ٤[- {٠}

ثانياً :

① (ر - ع) (١) = √(١ + ٢) - √(٤ - ١) = صفر

② (د . ع) (٥) غير معرفة لأن ٥ ∉ المجال

③ (ع/د) (٣) = √(٤ - ٣) / (٣^{٢} - ٤ × ٣) = - ١/٣

٤

① ح - {٠ ، -٢}   ② ح - {-١ ، ١}

③]-∞ ، ١[④]١/٢ ، ∞[

⑤ [١ ، ∞[⑥ [-٢ ، ٣]

⑦ [٢ ، ∞[⑧ [٤ ، ∞[- {٦}

⑨ ح - {١}   ⑩ [٣ ، ∞[

⑪]٥ ، ∞[⑫ [٣ ، ٥[

٥

① (ب)   ② (د)   ③ (أ)   ④ (أ)

⑤ (د)   ⑥ (جـ)   ⑦ (جـ)

٦

① (د . ر) (س) = { س^{٢} - ٢ س ، س ≥ ٢ ؛ - س^{٢} + ٢ س ، س < ٢ }

، والمجال = ح

② (د/ر) (س) = { ١ - ٢/س ، س ≥ ٢ ؛ -١ + ٢/س ، س < ٢ ، س ≠ ٠ }

، والمجال = ح - {٠}

③ (ر/د) (س) = { س / (س - ٢) ، س > ٢ ؛ س / (- س + ٢) ، س < ٢ }

، والمجال = ح - {٢}

٧

① ح -]٣ ، ٥]

② [٢ ، ∞[- {٣}

③ [-٢ ، ∞[- {٧ ، -١}

④ ح - {١ ، ٢ ، ٧/٤}

٨

① (د ∘ ر) (٢) = د (ر (٢)) = د (٢^{٢} - ٥)

= د (-١) = ٣ × (-١) + ١ = -٢

② (ر ∘ د) (-٣) = ر (د (-٣)) = ر (٣ (-٣) + ١)

= ر (-٨) = (-٨)^{٢} - ٥ = ٥٩

③ (ر ∘ ن) (١) = ر (ن (١)) ر (١^{٣})

= ر (١) = ١^{٢} - ٥ = -٤

④ (ن ∘ د) (-٢) = ن (د (-٢)) = ن (٣ (-٢) + ١)

= ن (-٥) = (-٥)^{٣} = -١٢٥

٩

① (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (س + ٣) = ١ / (س + ٣)

∵ م$_{١}$ = مجال ر = ح

، قيم س التى تجعل ر (س) فى مجال د

هى م$_{٢}$ = ح - {-٣}

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ح - {-٣}

② (ر ∘ د) (س) = ر (د (س)) = ر (١/س)

= ١/س + ٣

، ∵ م$_{١}$ = مجال د = ح - {٠}

، قيم س التى تجعل د (س) فى مجال ر

هى م$_{٢}$ = ح - {٠}

∴ مجال (ر ∘ د) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ح - {٠}

١٠

(١) (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = د (س^{٢}) = ١ / (س^{٢} − ١)

، ∵ م$_{١}$ = مجال ر = ح

، قيم س التي تجعل ر (س) في مجال د هي

م$_{٢}$ = ح − {−١ ، ١}

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ح − {−١ ، ١}

(٢) (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر (١ / (س − ١)) = (١ / (س − ١))^{٢}

= ١ / (س^{٢} − ٢ س + ١)

، ∵ م$_{١}$ = مجال د = ح − {١}

، قيم س التي تجعل د (س) في مجال ر هي

م$_{٢}$ = ح − {١}

∴ مجال (ر ∘ د) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ح − {١}

١١

(١) ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (٣ س) = (٣ س)^{٢} + ٦

= ٩ س^{٢} + ٦

∴ (د ∘ ر) (٣) = ٩ × ٣^{٢} + ٦ = ٨٧

(٢) ∵ ٩ س^{٢} + ٦ = ٤٢ ∴ ٩ س^{٢} = ٣٦

∴ س^{٢} = ٤ ∴ س = ± ٢

١٢

(١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (ب) (٤) (د)

(٥) (ب)

١٣

∵ (د ∘ ر) (س)

= د (ر (س)) = د (√(س − ٢))

= (√(س − ٢))^{٢} − ٣ = س − ٢ − ٣ = س − ٥

، ∵ م$_{١}$ = مجال ر = [٢ ، ∞[

، قيم س التي تجعل ر (س) في مجال د هي م$_{٢}$ = ح

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = [٢ ، ∞[

، (د ∘ ر) (٣) = ٣ − ٥ = −٢

١٤

∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (٢ / (س − ٢)) = √(٢ / (س − ٢) + ١)

= √((س − ١) / (س − ٢))

، ∵ م$_{١}$ = مجال ر = ح − {٢}

، بوضع (س − ١) / (س − ٢) ≥ ٠

∴ قيم س التي تجعل ر (س) في مجال د هي م$_{٢}$

= ح −]١ ، ٢]

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = ح −]١ ، ٢]

١٥

(١) ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (√(٤ − س))

= √(√(٤ − س) − ٢)

، ∵ م$_{١}$ = مجال ر =]−∞ ، ٤]

، بوضع √(٤ − س) − ٢ ≥ ٠

أي √(٤ − س) ≥ ٢

أي ٤ − س ≥ ٤ أي س ≤ ٠

∴ قيم س التي تجعل ر (س) في مجال د هي

م$_{٢}$ =]−∞ ، ٠]

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ =]−∞ ، ٠]

(٢) ∵ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر (√(س − ٢))

= √(٤ − √(س − ٢))

، ∵ م$_{١}$ = مجال د = [٢ ، ∞[

، بوضع ٤ − √(س − ٢) ≥ ٠

∴ √(س − ٢) ≤ ٤

∴ س − ٢ ≤ ١٦ ∴ س ≤ ١٨

∴ قيم س التي تجعل د (س) في مجال ر هي م$_{٢}$

=]−∞ ، ١٨]

∴ مجال (ر ∘ د) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = [٢ ، ١٨]

١٦

(١) ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (√(س^{٢} − ٤))

= √(√(س^{٢} − ٤) − ١)

، بوضع س^{٢} − ٤ ≥ ٠

∴ م$_{١}$ = مجال ر = ح −]−٢ ، ٢[

وبوضع √(س^{٢} − ٤) − ١ ≥ ٠

أي √(س^{٢} − ٤) ≥ ١ أي س^{٢} − ٤ ≥ ١

أي س^{٢} − ٥ ≥ ٠

، قيم س التي تجعل ر (س) في مجال د هي

م$_{٢}$ = ح −]−√٥ ، √٥[

∴ مجال (د ∘ ر) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$

= ح −]−√٥ ، √٥[

(٢) ∵ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر (√(س − ١))

= √((√(س − ١))^{٢} − ٤)

= √(س − ١ − ٤) = √(س − ٥)

، ∵ م$_{١}$ = مجال د = [١ ، ∞[

، قيم س التي تجعل د (س) في مجال ر هي

م$_{٢}$ = [٥ ، ∞[

∴ مجال (ر ∘ د) = م$_{١}$ ∩ م$_{٢}$ = [٥ ، ∞[

١٧

د (س) = √(س − ٤) ، ر (س) = س^{٢}

(توجد حلول أخرى)

١٨

بفرض د (س) = أ س + ب

، ∵ (د ∘ د) (س) = ١٦ س + ١٥

∴ د (د(س)) = ١٦ س + ١٥

∴ د (أ س + ب) = ١٦ س + ١٥

∴ أ (أ س + ب) + ب = ١٦ س + ١٥

∴ أ^{٢} س + أ ب + ب = ١٦ س + ١٥

∴ أ^{٢} = ١٦ ومنها أ = ± ٤

، أ ب + ب = ١٥ ∴ ب = ١٥ / (أ + ١)

، عند أ = ٤ ∴ ب = ٣

، عند أ = −٤ ∴ ب = −٥

∴ د (س) = ٤ س + ٣

أ، د (س) = −٤ س − ٥

١٩

(١) (د) (٢) (د) (٣) (د) (٤) (جـ) (٥) (جـ)

(٦) (د) (٧) (أ) (٨) (د) (٩) (جـ)

ارشادات لحل رقم **١٩**

① ∵ مجال د = [١ ، ∞[، مجال ر =]−∞ ، ١]

∴ مجال (د + ر) = [١ ، ∞[∩]−∞ ، ١]

= {١}

② فى الفترة ٠ < س < ١

(د + ر) (س) = د (س) + ر (س)

= (− س + ٢) + (س + ٢) = ٤

③ (ر ○ د) (−١) = ر (د (−١))

[لاحظ أن د (−١) = (−١)^{٢} + ١ = ٢]

= ر (٢)

= (٢)^{٢} + ٢ = ٦

④ ∵ د (ر (س)) = د (س)

∴ د (٢ س + ٣) = د (س)

∴ (٢ س + ٣)^{٢} = س^{٢}

∴ ٤ س^{٢} + ١٢ س + ٩ − س^{٢} = ٠

∴ ٣ س^{٢} + ١٢ س + ٩ = ٠

∴ س^{٢} + ٤ س + ٣ = ٠

∴ (س + ١) (س + ٣) = ٠

∴ س = −١ أو س = −٣

∴ مجموعة الحل = {−١ ، −٣}

⑤ ∵ (د ○ ر) (س) = ٣ س + ٢

∴ د (ر (س)) = ٣ س + ٢

∴ ٢ ر (س) + ١ = ٣ س + ٢

∴ ٢ ر (س) = ٣ س + ١

∴ ر (س) = $\frac{٣}{٢}$ س + $\frac{١}{٢}$

⑥ ∵ (ر ○ د) (س) = س + ٢

∴ ر (د (س)) = س + ٢

∴ ر (٢ س − ٣) = س + ٢

وبوضع ٢ س − ٣ = ص

∴ س = $\frac{ص + ٣}{٢}$

∴ ر (ص) = $\frac{ص + ٣}{٢}$ + ٢ = $\frac{ص + ٧}{٢}$

∴ ر (س) = $\frac{س + ٧}{٢}$

⑦ ∵ (ر ○ د) (٠) = (د ○ ر) (١)

∴ ر [د (٠)] = د [ر (١)]

لاحظ أن : د (٠) = ٢ ، ر (١) = $\frac{١ - ك}{٢}$

∴ ر (٢) = د ($\frac{١ - ك}{٢}$)

∴ $\frac{٢ - ك}{٥}$ = $\frac{١ - ك}{٢}$ + ٢

∴ ٤ − ٢ ك = ٥ − ٥ ك + ٢٠

∴ ٣ ك = ٢١ ∴ ك = ٧

⑧ ∵ (د ○ د ○ د) (١)

= د (د [د (١)]) [من الرسم د (١) = ٥]

= د (د (٥)) [من الرسم د (٥) = صفر]

= د (صفر) [من الرسم د (٠) = ٢]

= ٢

⑨ (د ○ ت) (٣) − (د ○ ت) (٨)

= د (ت (٣)) − د (ت (٨))

= د (٢) − د (٤)

= ٤ − ٨ = −٤

٢٠

① (د ○ د) (س) = د (د (س)) = د ($\frac{١}{س}$)

= ١ ÷ $\frac{١}{س}$ = س

② (د ○ د ○ د) (س) = د (د (د (س)))

= د (د ($\frac{١}{س}$))

= د (س) = $\frac{١}{س}$

③ نلاحظ مما سبق أن التركيب مرتين يعطى س والتركيب ثلاث مرات يعطى $\frac{١}{س}$ وهكذا نلاحظ أن فى باقى التركيب يعطى س ثم $\frac{١}{س}$

∴ (د ○ د ○ د ○ ..... إلى ن من المرات) (س)

= { س إذا كانت ن زوجية
  $\frac{١}{س}$ إذا كانت ن فردية

إجابات تمارين 3

١

شكل (١) : متماثل حول محور السينات ومحور الصادات ونقطة الأصل

شكل (٢) : متماثل حول محور السينات

شكل (٣) : متماثل حول نقطة الأصل

شكل (٤) : متماثل حول نقطة الأصل

شكل (٥) : متماثل حول محور الصادات

شكل (٦) : متماثل حول نقطة الأصل

٢

① (د) ② (أ) ③ (د) ④ (أ) ⑤ (ب)

⑥ (جـ) ⑦ (ب) ⑧ (ب) ⑨ (جـ) ⑩ (جـ)

⑪ (د) ⑫ (أ)

٣

① فردية ② ليست زوجية وليست فردية

③ زوجية ④ ليست زوجية وليست فردية

⑤ فردية ⑥ فردية

٤

شكل (١) :

المدى = {−٢ ، ٢} ، ليست زوجية وليست فردية

شكل (٢) : المدى = ح − [−٢ ، ٢] ، فردية

شكل (٣) : المدى =]−∞ ، ٢] ، زوجية

شكل (٤) : المدى = [٠ ، ٤] ، زوجية

شكل (٥) : المدى = ح − {٠} ، فردية

شكل (٦) : المدى = ح ، فردية

٥

شكل (١) : د (س) = س^{٣} + س

∵ مجال د = ح والمنحنى متماثل حول نقطة الأصل

∴ الدالة د فردية.

التحقيق الجبرى : لكل س ، − س ∈ ح

∵ د (− س) = (− س)^{٣} + (− س)

= − س^{٣} − س = − (س^{٣} + س)

= − د (س)

∴ الدالة فردية

شكل (٢) : د (س) = س^{٣} − ٢

∵ مجال د = ح

، المنحنى ليس متماثلاً حول محور الصادات وليس متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل.

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

التحقيق الجبرى : لكل س ، − س ∈ ح

∵ د (− س) = (− س)^{٣} − ٢ = − س^{٣} − ٢

= − (س^{٣} + ٢)

∴ د (− س) ≠ د (س) ≠ − د (س)

∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

شكل (٣) : د (س) = ٢ − س^{٢}

∵ مجال د = [−٢ ، ٢]

، المنحنى متماثل حول محور الصادات.

∴ الدالة د زوجية.

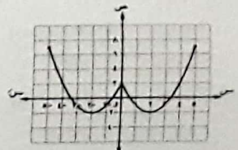
التحقيق الجبرى : لكل س ، − س ∈ [−٢ ، ٢]

∵ د (− س) = ٢ − (− س)^{٢} = ٢ − س^{٢} = د (س)

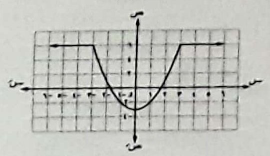
∴ الدالة زوجية.

٦

أولاً :

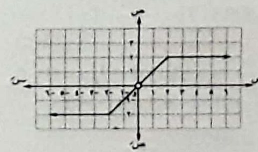


شكل (١)

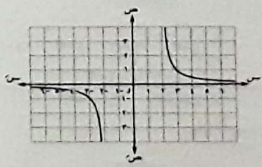


شكل (٣)

ثانيًا :



شكل (٢)



شكل (٤)

ثالثًا :

شكل (١) : المجال = [-٥ ، ٥] ، المدى = [-٢ ، ٧]
، ليست أحادية

شكل (٢) : المجال = ح - {٠}
، المدى = [-٢ ، ٢] - {٠} ، ليست أحادية

شكل (٣) : المجال = ح ، المدى = [-٣ ، ٦]
، ليست أحادية

شكل (٤) : المجال = ح - [-٢ ، ٢]
، المدى = ح - {٠} ، أحادية.

٧

① $د(-س) = ٥ = د(س)$ ∴ الدالة زوجية.

② $د(-س) = (-س)^٤ + (-س)^٢ - ١$
$= س^٤ + س^٢ - ١ = د(س)$
∴ الدالة زوجية.

③ $د(-س) = ٣(-س) - ٤(-س)^٣$
$= -٣س + ٤س^٣$
$= -(٣س - ٤س^٣) = -د(س)$
∴ الدالة فردية.

④ $د(-س) = (-س)^٢ - ٣(-س) + ٤$
$= س^٢ + ٣س + ٤$
$\neq د(س) \neq -د(س)$
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

⑤ $د(-س) = (-س)^٣\left((-س)^٢ - ١\right)$
$= -س^٣(س^٢ - ١) = -د(س)$
∴ الدالة فردية.

⑥ $د(-س) = (-س - ٣)^٢ - ٧$
$= (س + ٣)^٢ - ٧$
$\neq د(س) \neq -د(س)$
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

⑦ $د(-س) = \frac{(-س)^٢ + ٢}{-س - ٢}$
$= \frac{س^٢ + ٢}{-س - ٢} = \frac{س^٢ + ٢}{-(س + ٢)}$
$\neq د(س) \neq -د(س)$
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

حل آخر :
∵ مجال الدالة = ح - {-٣}
∴ ٣ ∈ مجال الدالة ، -٣ ∉ مجالها
∴ الدالة ليست فردية وليست زوجية.

⑧ $د(-س) = \frac{٢(-س)^٣ - (-س)^٥}{-س}$
$= \frac{-٢س^٣ + س^٥}{-س}$
$= \frac{-(٢س^٣ - س^٥)}{-س}$
$= \frac{٢س^٣ - س^٥}{س} = د(س)$
∴ الدالة زوجية.

⑨ $د(-س) = \frac{(-س)^٢}{١ - س} = \frac{س^٢}{١ - س}$
$\neq د(س) \neq -د(س)$
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

⑩ ∵ مجال د = [-٣ ، ∞[
∴ لكل س ∈ [-٣ ، ∞[
ليس بالضرورة أن يوجد -س ∈ [-٣ ، ∞[
∴ الدالة د ليست زوجية وليست فردية.

⑪ $د(-س) = \left((-س)^٢ + ١\right)^٣ = (س^٢ + ١)^٣$
$= د(س)$
∴ الدالة زوجية.

⑫ $د(-س) = \sqrt{(-س)^٢ + ٦} = \sqrt{س^٢ + ٦} = د(س)$
∴ الدالة زوجية.

⑬ $د(-س) = \sqrt[٣]{(-س)^٣ + (-س)}$
$= \sqrt[٣]{-(س^٣ + س)} = -\sqrt[٣]{س^٣ + س}$
$= -د(س)$
∴ الدالة فردية.

⑭ $د(-س) = (-س)^٣ - \frac{١}{-س}$
$= -س^٣ + \frac{١}{س}$
$= -\left(س^٣ - \frac{١}{س}\right) = -د(س)$
∴ الدالة فردية.

⑮ $د(-س) = \left(-س - \frac{٢}{-س}\right)^٣$
$= \left(-(س - \frac{٢}{س})\right)^٣$
$= -\left(س - \frac{٢}{س}\right)^٣ = -د(س)$
∴ الدالة فردية.

⑯ $د(-س) = \left(\frac{(-س)^٢}{٣} - \frac{٥}{(-س)^٤}\right)^٥$
$= \left(\frac{س^٢}{٣} - \frac{٥}{س^٤}\right)^٥ = د(س)$
∴ الدالة زوجية.

⑰ $د(-س) = \left(\frac{٢ + س}{٢ - س}\right)^٢ + \left(\frac{٢ - س}{٢ + س}\right)^٢$
$= د(س)$
∴ الدالة زوجية.

⑱ $د(-س) = \left(\frac{١ + س}{١ - س}\right)^٢ - \left(\frac{١ - س}{١ + س}\right)^٢$
$= -د(س)$
∴ الدالة فردية.

⑲ $د(-س) = \left(\frac{-س - ١}{-س + ١}\right)^٥ + \left(\frac{-س + ١}{-س - ١}\right)^٥$
$= \left[\frac{-(س + ١)}{-(س - ١)}\right]^٥ + \left[\frac{-(س - ١)}{-(س + ١)}\right]^٥$
$= \left(\frac{س + ١}{س - ١}\right)^٥ + \left(\frac{س - ١}{س + ١}\right)^٥$
$= د(س)$
∴ الدالة زوجية.

⑳ $د(-س) = \left((-س)^٣ + ١\right)^٤ - \left((-س)^٣ - ١\right)^٤$
$= \left(-(س^٣ - ١)\right)^٤ - \left(-(س^٣ + ١)\right)^٤$
$= (س^٣ - ١)^٤ - (س^٣ + ١)^٤$
$= -د(س)$
∴ الدالة فردية.

㉑ $د(-س) = -س \ جتا(-س) = -س \ جتا \ س$
$= -د(س)$
∴ الدالة فردية.

٢٢) د (- س) = (- ٣ س) / (ظا (- س)) = (- ٣ س) / (- ظا س) = (٣ س) / (ظا س)
= د (س)
∴ الدالة زوجية.

٢٣) د (- س) = ((- س)^{٢} × جا (-٣ س)) / (١ + (- س)^{٤})
= (س^{٢} جا ٣ س) / (١ + س^{٤}) = د (س)
∴ الدالة زوجية.

٢٤) د (- س) = (٣ (- س)^{٢} - جتا (- س)) / ((- س)^{٣} + ٦ س)
= (٣ س^{٢} - جتا س) / (- س^{٣} + ٦ س) = (٣ س^{٢} - جتا س) / (- (س^{٣} - ٦ س))
= - د (س)
∴ الدالة فردية.

٢٥) د (- س) = (- س)^{٢} (جا (- س))^{٣}
= س^{٢} (- جا س)^{٣} = - س^{٢} جا^{٣} س
= - د (س)
∴ الدالة فردية.

٢٦) د (- س) = - س جا (- س)^{٣}
= - س جا (- س^{٣})
= س جا س^{٣} = د (س)
∴ الدالة زوجية.

٢٧) د (- س) = ((- س)^{٢} + ظا (- س)) / ((- س)^{٤} + جا (- س))
= (س^{٢} - ظا س) / (س^{٤} - جا س) ≠ د (س) ≠ - د (س)
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

٢٨) د (- س) = جا (- س)^{٢} - (جا (- س))^{٢}
= جا س^{٢} - (- جا س)^{٢}
= جا س^{٢} - جا^{٢} س = د (س)
∴ الدالة زوجية.

٢٩) د (- س) = (- س)^{٤} + جا^{٦} (- س)
= س^{٤} + (- جا س)^{٦}
= س^{٤} + جا^{٦} س = د (س)
∴ الدالة زوجية.

٣٠) د (- س) = (- س)^{٧} + ظا^{٥} (- س)
= - س^{٧} + (- ظا س)^{٥}
= - س^{٧} - ظا^{٥} س = - د (س)
∴ الدالة فردية.

٣١) د (- س) = (جا (- ٢ س) جتا (- ٢ س)) / (قا (- س))
= (- جا ٢ س جتا ٢ س) / (قا س) = - د (س)
∴ الدالة فردية.

٣٢) ∵ د (س) = ٢$^{٢ س}$ + جتا س + ٢$^{-٢ س}$
∴ د (- س) = ٢$^{-٢ س}$ + جتا (- س) + ٢$^{٢ س}$
= ٢$^{-٢ س}$ + جتا س + ٢$^{٢ س}$
= د (س)
∴ الدالة زوجية.

٣٣) ∵ د (س)
= ((جتا س + جا س) - ١) ((جتا س + جا س) + ١)
= (جتا س + جا س)^{٢} - ١
= جتا^{٢} س + جا^{٢} س + ٢ جا س جتا س - ١
= ١ + ٢ جا س جتا س - ١ = ٢ جا س جتا س
∴ د (- س) = ٢ جا (- س) جتا (- س)
= -٢ جا س جتا س = - د (س)
∴ الدالة فردية.

٣٤) د (- س) = { -٢ س ، - س ≥ ٠
{ ٢ س ، - س < ٠
= { -٢ س ، س ≤ ٠
{ ٢ س ، س > ٠
= { ٢ س ، س ≥ ٠
{ -٢ س ، س < ٠
= د (س)
∴ الدالة زوجية.

٣٥) د (- س)
= { -٢ س + (- س)^{٢} ، - س ≤ ٠
{ -٢ س - (- س)^{٢} ، - س > ٠
= { - (٢ س - س^{٢}) ، س ≥ ٠
{ - (٢ س + س^{٢}) ، س < ٠
= { - (٢ س + س^{٢}) ، س ≤ ٠
{ - (٢ س - س^{٢}) ، س > ٠
= - { ٢ س + س^{٢} ، س ≤ ٠
{ ٢ س - س^{٢} ، س > ٠
= - د (س)
∴ الدالة فردية.

٨

شكل (١) : نلاحظ أن كل مستقيم أفقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة ولذلك فإن الدالة د أحادية

<u>التحقيق الجبرى :</u>

بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د
∴ د (أ) = ٢ - ٢ أ ، د (ب) = ٢ - ٢ ب
وبوضع د (أ) = د (ب) ∴ ٢ - ٢ أ = ٢ - ٢ ب
∴ -٢ أ = - ٢ ب ∴ أ = ب
∴ الدالة د أحادية

شكل (٢) : نلاحظ أن كل مستقيم أفقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة ولذلك فإن الدالة د أحادية

<u>التحقيق الجبرى :</u>

بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د
∴ د (أ) = ٤ - أ^{٣} ، د (ب) = ٤ - ب^{٣}
وبوضع د (أ) = د (ب) ∴ ٤ - أ^{٣} = ٤ - ب^{٣}
∴ - أ^{٣} = - ب^{٣} ∴ أ = ب
∴ الدالة د أحادية.

شكل (٣) : نلاحظ أن كل مستقيم أفقى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة ولذلك فإن الدالة د أحادية

<u>التحقيق الجبرى :</u>

بفرض أن أ ، ب ∈ مجال الدالة د
∴ د (أ) = (أ - ١) / (أ - ٢) ، د (ب) = (ب - ١) / (ب - ٢)
وبوضع د (أ) = د (ب) ∴ (أ - ١) / (أ - ٢) = (ب - ١) / (ب - ٢)
∴ (أ - ١) (ب - ٢) = (أ - ٢) (ب - ١)
∴ أ ب - ٢ أ - ب + ٢ = أ ب - أ - ٢ ب + ٢
∴ -٢ أ - ب = - أ - ٢ ب
∴ ٢ ب - ب = ٢ أ - أ ∴ ب = أ
∴ الدالة د أحادية.

٩

١) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د
، ∵ د (أ) = ٢ أ - ٣ ، د (ب) = ٢ ب - ٣
وبوضع د (أ) = د (ب)
∴ ٢ أ - ٣ = ٢ ب - ٣ ∴ ٢ أ = ٢ ب
∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

٢) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د
، ∵ د (أ) = ٤ - أ^{٢} ، د (ب) = ٤ - ب^{٢}
وبوضع د (أ) = د (ب)
∴ ٤ - أ^{٢} = ٤ - ب^{٢} ∴ - أ^{٢} = - ب^{٢}
∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية

٣) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د
، ∵ د (أ) = ٣ / (٢ أ + ٥) ، د (ب) = ٣ / (٢ ب + ٥)
وبوضع د (أ) = د (ب)
∴ ٣ / (٢ أ + ٥) = ٣ / (٢ ب + ٥) ∴ ٢ أ + ٥ = ٢ ب + ٥
∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

٤) بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د
، ∵ د (أ) = (٣ أ - ٥) / (٤ أ + ٢) ، د (ب) = (٣ ب - ٥) / (٤ ب + ٢)
وبوضع د (أ) = د (ب)
∴ (٣ أ - ٥) / (٤ أ + ٢) = (٣ ب - ٥) / (٤ ب + ٢)

∴ (٣أ - ٥) (٤ب + ٣) = (٤أ + ٣) (٣ب - ٥)

∴ ١٢أب + ٩أ - ٢٠ب - ١٥

= ١٢أب - ٢٠أ + ٩ب - ١٥

∴ ٩أ - ٢٠ب = - ٢٠أ + ٩ب

∴ ٢٩أ = ٢٩ب ∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

١٠

① بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د ، أ ≠ ب

، ∵ د (أ) = ٣ ، د (ب) = ٣

∴ د (أ) = د (ب) ∴ د دالة ليست أحادية.

② بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = (أ + ٣)^{٢} ، د (ب) = (ب + ٣)^{٢}

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ (أ + ٣)^{٢} = (ب + ٣)^{٢} ∴ أ + ٣ = ± (ب + ٣)

∴ أ + ٣ = ب + ٣ ∴ أ = ب

أ، أ + ٣ = - ب - ٣ ∴ أ = - ب - ٦

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، - ب - ٦

∴ د دالة ليست أحادية.

③ بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = أ^{٢} - ٥أ + ٦

، د (ب) = ب^{٢} - ٥ب + ٦

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ أ^{٢} - ٥أ + ٦ = ب^{٢} - ٥ب + ٦

∴ أ^{٢} - ٥أ = ب^{٢} - ٥ب

∴ أ^{٢} - ب^{٢} - ٥أ + ٥ب = ٠

∴ (أ - ب) (أ + ب) - ٥ (أ - ب) = ٠

∴ (أ - ب) (أ + ب - ٥) = ٠

∴ أ - ب = ٠ ∴ أ = ب

أ، أ + ب - ٥ = ٠ ∴ أ = - ب + ٥

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، - ب + ٥

∴ د دالة ليست أحادية.

④ بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = ١ / (أ^{٢} - ٤) ، د (ب) = ١ / (ب^{٢} - ٤)

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ ١ / (أ^{٢} - ٤) = ١ / (ب^{٢} - ٤) ∴ أ^{٢} - ٤ = ب^{٢} - ٤

∴ أ^{٢} = ب^{٢} ∴ أ = ± ب

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، - ب

∴ د دالة ليست أحادية.

١١

① بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = أ^{٣} + ١ ، د (ب) = ب^{٣} + ١

وبوضع د (أ) = د (ب) ∴ أ^{٣} + ١ = ب^{٣} + ١

∴ أ^{٣} = ب^{٣} ∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

② بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = أ^{٢} - ١ ، د (ب) = ب^{٢} - ١

وبوضع د (أ) = د (ب) ∴ أ^{٢} - ١ = ب^{٢} - ١

∴ أ^{٢} = ب^{٢} ∴ أ = ± ب

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، - ب

∴ د دالة ليست أحادية.

③ بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = ٢ أ^{٢} - أ - ٣

، د (ب) = ٢ ب^{٢} - ب - ٣

وبوضع د (أ) = د (ب)

∴ ٢ أ^{٢} - أ - ٣ = ٢ ب^{٢} - ب - ٣

∴ ٢ أ^{٢} - ٢ ب^{٢} - أ + ب = ٠

∴ ٢ (أ^{٢} - ب^{٢}) - (أ - ب) = ٠

∴ ٢ (أ - ب) (أ + ب) - (أ - ب) = ٠

∴ (أ - ب) (٢ (أ + ب) - ١) = ٠

∴ أ - ب = ٠ ∴ أ = ب

أ، ٢ (أ + ب) - ١ = ٠

∴ أ + ب = $\frac{١}{٢}$ ∴ أ = $\frac{١}{٢}$ - ب

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، $\frac{١}{٢}$ - ب

∴ د دالة ليست أحادية.

④ بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = أ^{٤} + ٢ أ^{٢} + ١

، د (ب) = ب^{٤} + ٢ ب^{٢} + ١

، وبفرض د (أ) = د (ب)

∴ أ^{٤} + ٢ أ^{٢} + ١ = ب^{٤} + ٢ ب^{٢} + ١

∴ (أ^{٢} + ١)^{٢} = (ب^{٢} + ١)^{٢}

∴ أ^{٢} + ١ = ب^{٢} + ١ ∴ أ^{٢} = ب^{٢} ∴ أ = ± ب

∴ أ لها قيمتان هما : ب ، - ب

∴ د دالة ليست أحادية.

⑤ بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = (٢أ + ١) / (أ - ٢) ، د (ب) = (٢ب + ١) / (ب - ٢)

، وبفرض أن د (أ) = د (ب)

∴ (٢أ + ١) / (أ - ٢) = (٢ب + ١) / (ب - ٢)

∴ (٢أ + ١) (ب - ٢) = (أ - ٢) (٢ب + ١)

∴ ٢أب - ٤أ + ب - ٢

= ٢أب + أ - ٤ب - ٢

∴ -٤أ + ب = أ - ٤ب

∴ ٥ب = ٥أ ∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

⑥ بفرض أن : أ ، ب ∈ مجال الدالة د

، ∵ د (أ) = (٣ - أ) / (أ + ٣) ، د (ب) = (٣ - ب) / (ب + ٣)

، وبفرض أن د (أ) = د (ب) ∴ (٣ - أ) / (أ + ٣) = (٣ - ب) / (ب + ٣)

∴ (٣ - أ) (ب + ٣) = (أ + ٣) (٣ - ب)

∴ ٣ب + ٩ - أب - ٣أ = ٣أ - أب + ٩ - ٣ب

∴ ٣ب - ٣أ = ٣أ - ٣ب

∴ ٦ب = ٦أ ∴ أ = ب ∴ د دالة أحادية.

١٢

من ① : ④ ليست زوجية وليست فردية.

١٣

① ∵ الدالة فردية. ∴ د (-٥) = - د (٥)

∴ المقدار = (-٧ د (٥) + ٣ د (٥)) / (-٢ د (٥)) = (-٤ د (٥)) / (-٢ د (٥)) = ٢

② ∵ الدالة زوجية. ∴ د (-٥) = د (٥)

∴ المقدار = (٧ د (٥) + ٣ د (٥)) / (٢ د (٥)) = (١٠ د (٥)) / (٢ د (٥)) = ٥

١٤

① (د + ر) (س) = (١ - س)^{٢} + (١ + س)^{٢}

∴ (د + ر) (- س) = (١ + س)^{٢} + (١ - س)^{٢}

= (د + ر) (س)

∴ (د + ر) زوجية.

② (د - ر) (س) = (١ - س)^{٢} - (١ + س)^{٢}

∴ (د - ر) (- س) = (١ + س)^{٢} - (١ - س)^{٢}

= - (د - ر) (س)

∴ (د - ر) فردية.

③ (د . ر) (س) = (١ - س)^{٢} (١ + س)^{٢}

∴ (د . ر) (- س) = (١ + س)^{٢} (١ - س)^{٢}

= (د . ر) (س)

∴ (د . ر) زوجية.

④ $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (س) = $\frac{(\text{١ - س})^2}{(\text{١ + س})^2}$

∴ $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (- س) = $\frac{(\text{١ + س})^2}{(\text{١ - س})^2}$

≠ $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (س) ≠ - $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ (س)

∴ $\left(\frac{\text{د}}{\text{ر}}\right)$ ليست زوجية وليست فردية.

١٥

∵ د$_1$ ، د$_2$ زوجيتان ، ر$_1$ ، ر$_2$ فرديتان

① د$_1$ + ر$_2$ ليست زوجية وليست فردية

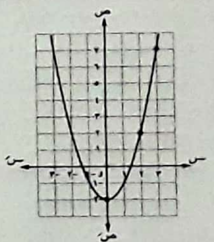
② د$_1$ - د$_2$ زوجية　　③ ر$_1$ + ر$_2$ فردية

④ د$_1$. ر$_2$ فردية　　⑤ ر$_1$. ر$_2$ زوجية

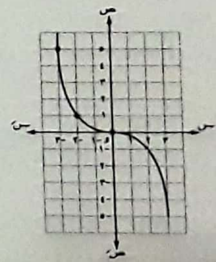
⑥ $\frac{\text{د}_2}{\text{د}_1}$ زوجية

١٦

①



②



١٧

① (جـ)　② (جـ)　③ (جـ)　④ (ب)

⑤ (أ)　⑥ (ب)　⑦ (أ)　⑧ (أ)

إرشادات لحل رقم ١٧

① ∵ د دالة ينتمى إليها النقطة (٢ ، ٣)

∴ النقطة (٢ ، -١) ∌ بيان الدالة

، ∵ د أحادية ينتمى اليها النقطة (٢ ، ٢)

∴ النقطة (٥ ، ٣) ∌ بيان الدالة

∴ النقطة التى يمكن أن تنتمى للدالة هى (٣ ، ٢)

② ∵ الدالة احادية تمر بالنقطتين (٢ ، أ) ، (٣ ، ب)

∴ لابد وأن يكون أ ≠ ب دائمًا

③ ∵ د زوجية　　∴ د (س) = د (- س)

∴ د (س) + س^2 د (س) = ٣

∴ د (س) [١ + س^2] = ٣

∴ د (س) = $\frac{\text{٣}}{\text{١ + س}^2}$

∴ د (١) = ١$\frac{1}{2}$

④ ∵ د فردية ، د (١) = ك ∴ د (- ١) = - ك

، ∵ د (س + ٢) = د (س) + د (٢)

بوضع س = -١

∴ د (١) = د (-١) + د (٢)

∴ ك = - ك + د (٢)　∴ د (٢) = ٢ ك

، بوضع س = ١

∴ د (٣) = د (١) + د (٢) = ك + ٢ ك = ٣ ك

⑤ ∵ (د + ر) (- س)

= $\frac{\text{١ + (- س)}}{\text{١ - (- س)}}$ + $\frac{\text{١ - (- س)}}{\text{١ + (- س)}}$

= $\frac{\text{١ - س}}{\text{١ + س}}$ + $\frac{\text{١ + س}}{\text{١ - س}}$ = (د + ر) (س)

∴ (د + ر) (س) دالة زوجية

، ∵ (د . ر) (س) = $\frac{\text{١ + س}}{\text{١ - س}}$ × $\frac{\text{١ - س}}{\text{١ + س}}$ = ١

∴ (د . ر) (س) دالة زوجية أيضًا.

⑥ ∵ ر (- س) = د (- س) + د (س) = ر (س)

∴ ر دالة زوجية دائمًا

⑦ ∵ ٣ د (س) + ٢ د (- س) = س^2 - جا س (١)

وبوضع - س بدلًا من س

∴ ٣ د (- س) + ٢ د (س) = (- س)^2 - جا (- س)

∴ ٣ د (- س) + ٢ د (س) = - س^2 + جا س (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ٥ د (س) + ٥ د (- س) = صفر

∴ د (س) = - د (- س)

∴ الدالة فردية.

⑧ ∵ د (س) = س^3 ، ر (س) = س^2 + ١

∴ (١) (د × ر) (س) = س^3 (س^2 + ١)

∴ (د × ر) (- س) = (- س)^3 ((- س)^2 + ١)

= - س^3 (س^2 + ١)

∴ (د × ر) (- س) = - (د × ر) (س)

أى أن : (د × ر) فردية.

(٢) (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د (س^2 + ١)

= (س^2 + ١)^3

∴ (د ∘ ر) (- س) = ((- س)^2 + ١)^3

= (س^2 + ١)^3

= (د ∘ ر) (س)

∴ (د ∘ ر) (س) زوجية.

(٣) (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر (س^3) = س^6 + ١

∴ (ر ∘ د) (- س) = ((- س)^6 + ١)

= س^6 + ١ = (ر ∘ د) (س)

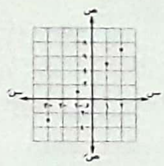
∴ (ر ∘ د) (س) زوجية.

∴ الاجابة (أ) هى الصحيحة.

إجابات تمارين 4

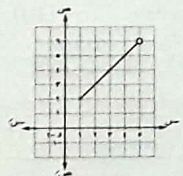
١

①



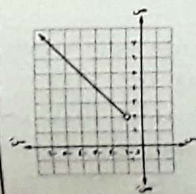
المدى = {-٣ ، ١ ، ٥ ، ٧}

②



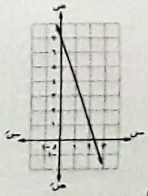
المدى = [٢ ، ٦[

③



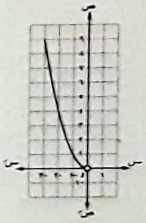
المدى =]٢ ، ∞[

④



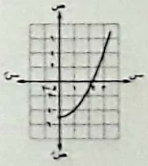
المدى = ح

⑤



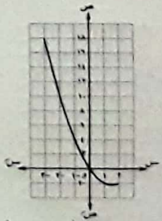
المدى =]٠ ، ∞[

⑥



• المدى = [-٥ ، ∞[

⑦

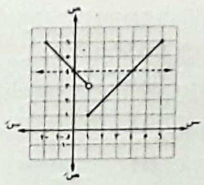


لاحظ أن رأس المنحنى (١.٥ ، -٢$\frac{١}{٤}$)

• المدى = [-٢$\frac{١}{٤}$ ، ١٨]

٢

①



• المدى = [١ ، ٦]

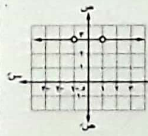
• الدالة تناقصية فى]-٢ ، ١[

، وتزايدية فى]١ ، ٦[

② الدالة ليست أحادية لأنه يوجد خط أفقى يقطع الدالة فى أكثر من نقطة.

٣

①



د (س) = $\frac{٢ (س^{٢} - ١)}{(س^{٢} - ١)}$

∴ د (س) = ٢

، س ≠ ± ١

• المجال = ح - {١ ، -١} • المدى = {٢}

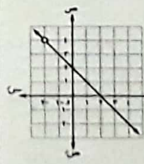
• الدالة ثابتة على مجالها. • الدالة زوجية.

• الدالة متماثلة حول محور الصادات.

②

د (س) = $\frac{(٢ - س) (٢ + س)}{س + ٢}$ = ٢ - س

، س ≠ -٢



• المجال = ح - {-٢}

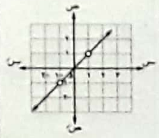
• المدى = ح - {٤}

• الدالة تناقصية على مجالها

• الدالة ليست فردية وليست زوجية.

③

د (س) = $\frac{س (س^{٢} - ١)}{(س^{٢} - ١)}$ = س ، س ≠ ± ١



• المجال = ح - {-١ ، ١}

• المدى = ح - {-١ ، ١}

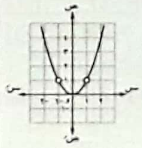
• الدالة تزايدية

على ح - {-١ ، ١}

• الدالة فردية.

• الدالة متماثلة حول نقطة الأصل.

④



د (س)

= $\frac{س^{٢} (س^{٢} - ١)}{(س^{٢} - ١)}$ = س^{٢}

حيث س ≠ ± ١

• المجال = ح - {١ ، -١}

• المدى = [٠ ، ∞[- {١}

• الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ٠] - {-١}

، وتزايدية فى [٠ ، ∞[- {١} • الدالة زوجية.

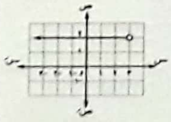
• الدالة متماثلة حول محور الصادات.

٤

① (أ) ② (جـ) ③ (د) ④ (ب) ⑤ (جـ)

٥

①



• المجال =]-∞ ، ٢[

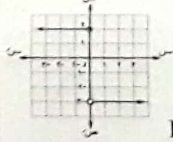
• المدى = {٢}

• الدالة ثابتة فى الفترة]- ∞ ، ٢[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

②



• المجال = ح

• المدى = {-٣ ، ٢}

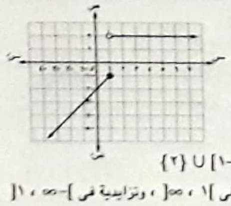
• الدالة ثابتة فى كل من

]- ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

③



• المجال = ح

• المدى

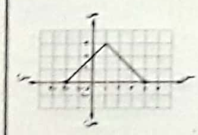
=]-∞ ، -١] ∪ {٢}

• الدالة ثابتة فى]١ ، ∞[، وتزايدية فى]-∞ ، ١[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

④



• المجال = [-٢ ، ٤]

• المدى = [٠ ، ٣]

• الدالة تزايدية

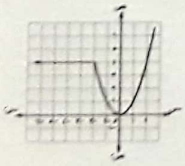
فى]-٢ ، ١[

، وتناقصية فى]١ ، ٤[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• محور التماثل هو المستقيم س = ١

⑤



• المجال = ح

• المدى = [٠ ، ∞[

• الدالة ثابتة

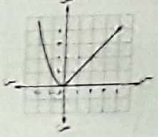
فى]- ∞ ، -٢[

، وتناقصية فى]-٢ ، ٠[، وتزايدية فى]٠ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑥



• المجال = ع

• المدى = [٠ ، ∞[

• الدالة تناقصية

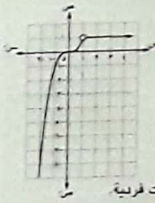
في]-∞ ، ٠[

، وتزايدية في]٠ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑦



• المجال = ع - {١}

• المدى =]-∞ ، ١]

• الدالة تزايدية

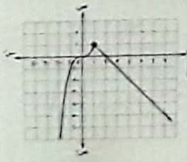
في]-∞ ، ١[

، وثابتة في]١ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑧



• المجال = ع

• المدى =]-∞ ، ١]

• الدالة تزايدية

في]-∞ ، ١[

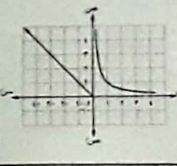
، وتناقصية

في]١ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑨



• المجال = ع

• المدى = [صفر ، ∞[

• الدالة تناقصية

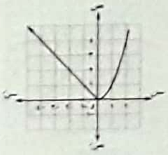
في]-∞ ، ٠[

،]٠ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑩



• المجال = ع

• المدى = [صفر ، ∞[

• الدالة تناقصية

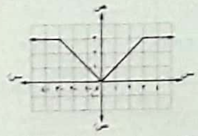
في]-∞ ، ٠[

، وتزايدية في]٠ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑪



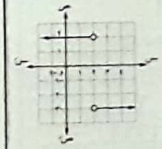
• المجال = ع • المدى = [٠ ، ٢]

• الدالة ثابتة في كل من]-∞ ، -٢[،]٢ ، ∞[

، وتناقصية في]-٢ ، ٠[، وتزايدية في]٠ ، ٢[

• الدالة زوجية. • محور التماثل هو المستقيم س = ٠

⑫



د (س) = { -٢ ، س < ٢ ؛ ٢ ، س > ٢ }

• المجال = ع - {٢}

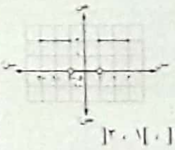
• المدى = {٢ ، -٢}

• الدالة ثابتة في كل من]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• الدالة ليست لها نقطة تماثل وليس لها محور تماثل.

⑬



• المجال = [-٢ ، ٢]

• المدى = {٠ ، ٢}

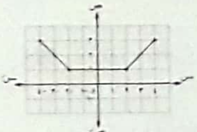
• الدالة ثابتة في كل من

]-٢ ، -١[،]-١ ، ١[،]١ ، ٢[

• الدالة زوجية

• محور التماثل هو المستقيم س = ٠

⑭



• المجال = [-٤ ، ٤] • المدى = [١ ، ٣]

• الدالة تناقصية في]-٤ ، -٢[

، وثابتة في]-٢ ، ٢[

وتزايدية في]٢ ، ٤[• الدالة زوجية.

• محور التماثل هو المستقيم س = ٠

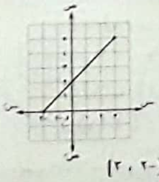
٦

$د_١$ (س) = ٢ س - ١ ، مجالها = ع

، $د_٢$ (س) = ٣ - ٢ س ، مجالها = [-٢ ، ٣]

، ($د_١$ + $د_٢$) (س) = س + ٢ ، ومجالها = [-٢ ، ٣]

س	-٢	-١	٠	١	٢	٣
($د_١$ + $د_٢$) (س)	٠	١	٢	٣	٤	٥



• المجال = [-٢ ، ٣]

• الدالة تزايدية في]-٢ ، ٣[

٧

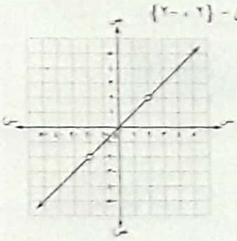
∵ د (س) = $س^٣$ - ٤ س ومجالها = ع

، ر (س) = $س^٢$ - ٤ ومجالها = ع

∴ (د/ر) (س) = ($س^٣$ - ٤ س) / ($س^٢$ - ٤) = س ($س^٢$ - ٤) / ($س^٢$ - ٤) = س

حيث س ≠ ± ٢

ومجال د/ر = ع - {٢ ، -٢}



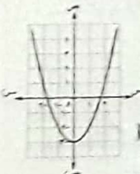
• المدى = ع - {٢ ، -٢} • الدالة فردية.

• الدالة تزايدية على ع - {٢ ، -٢} • الدالة أحادية.

إجابات تمارين 5

١

①



• المجال = ع

• المدى = [-٣ ، ∞[

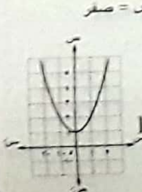
• الدالة تناقصية في]-∞ ، ٠[

، الدالة تزايدية في]٠ ، ∞[

• الدالة زوجية.

• معادلة محور التماثل هي س = صفر

②



• المجال = ع

• المدى = [١ ، ∞[

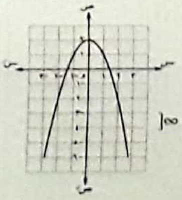
• الدالة تناقصية في]-∞ ، ٠[

، الدالة تزايدية في]٠ ، ∞[

• الدالة زوجية.

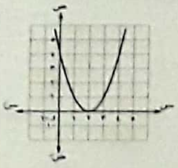
• معادلة محور التماثل هي س = صفر

③



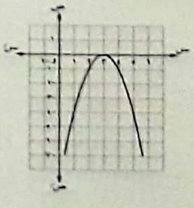
• المجال = ح
• المدى =]-∞ ، ٢]
• الدالة تناقصية في]٠ ، ∞[
، الدالة تزايدية
في]-∞ ، ٠[
• الدالة زوجية.
• معادلة محور التماثل هي : س = صفر

④



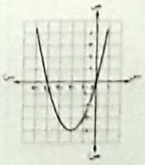
• المجال = ح
• المدى = [٠ ، ∞[
• الدالة تناقصية
في]-∞ ، ٢[
، الدالة تزايدية في]٢ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• معادلة محور التماثل هي : س = ٢

⑤



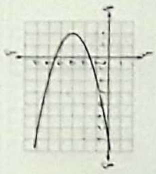
• المجال = ح
• المدى =]-∞ ، ٠]
• الدالة تناقصية
في]٣ ، ∞[
، الدالة تزايدية
في]-∞ ، ٣[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• معادلة محور التماثل هي : س = ٣

⑥



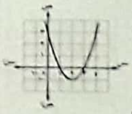
• المجال = ح
• المدى = [-٤ ، ∞[
• الدالة تناقصية
في]-∞ ، -٢[
، الدالة تزايدية
في]-٢ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• معادلة محور التماثل هي : س = -٢

⑦



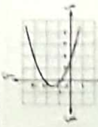
• المجال = ح
• المدى =]-∞ ، ٢]
• الدالة تناقصية
في]-٣ ، ∞[
، الدالة تزايدية
في]-∞ ، -٣[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• معادلة محور التماثل هي : س = -٣

⑧



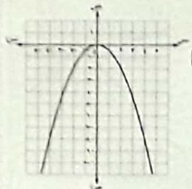
• المجال = ح
• المدى = [-١ ، ∞[
• الدالة تناقصية في]-∞ ، ٢[
، الدالة تزايدية في]٢ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• معادلة محور التماثل هي : س = ٢

⑨



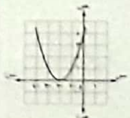
• المجال = ح
• المدى = [$-\frac{١}{٢}$ ، ∞[
• الدالة تناقصية في]-∞ ، $-\frac{٣}{٢}$[
، الدالة تزايدية في]$-\frac{٣}{٢}$ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• معادلة محور التماثل هي : س = $-\frac{٣}{٢}$

⑩



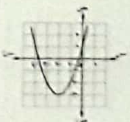
• المجال = ح
• المدى =]-∞ ، ٠]
• الدالة تناقصية
في]٠ ، ∞[
، الدالة تزايدية
في]-∞ ، ٠[
• الدالة زوجية.
• معادلة محور التماثل هي : س = صفر

⑪



د(س) = $(س + ٢)^٢$
• المجال = ح
• المدى = [٠ ، ∞[
• الدالة تناقصية في]-∞ ، -٢[
، الدالة تزايدية في]-٢ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• معادلة محور التماثل هي : س = -٢

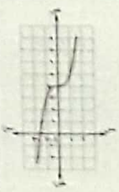
⑫



د(س) = $(س + ٢)^٢ - ٣$
• المجال = ح
• المدى = [-٣ ، ∞[
• الدالة تناقصية في]-∞ ، -٢[
، الدالة تزايدية في]-٢ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• معادلة محور التماثل هي : س = -٢

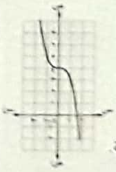
٢

①



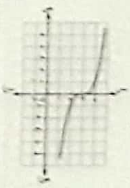
• المجال = ح • المدى = ح
• الدالة تزايدية على ح
• الدالة ليست زوجية
وليست فردية.
• نقطة التماثل هي : (٠ ، ٤)

②

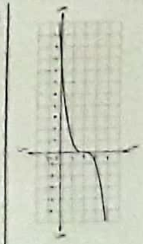


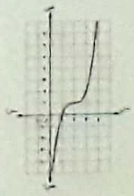
• المجال = ح
• المدى = ح
• الدالة تناقصية على ح
• الدالة ليست زوجية وليست فردية.
• نقطة التماثل هي : (٠ ، ٤)

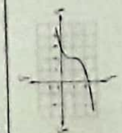
③

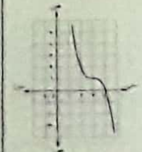


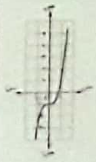
• المجال = ح
• المدى = ح
• الدالة تزايدية على ح
• الدالة ليست زوجية
وليست فردية.
• نقطة التماثل هي : (٣ ، ٠)

④

ر (س) = − (س − ٢)^{٣}
• المجال = ح
• المدى = ح
• الدالة تناقصية على ح
• الدالة ليست زوجية
وليست فردية
• نقطة التماثل هى (٢ ، ٠)

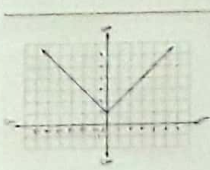
⑤

• المجال = ح
• المدى = ح
• الدالة تزايدية على ح
• الدالة ليست زوجية
وليست فردية
• نقطة التماثل هى (٢ ، ١)

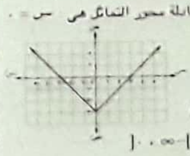
⑥

• المجال = ح • المدى = ح
• الدالة تناقصية على ح
• الدالة ليست زوجية وليست فردية
• نقطة التماثل هى (١ ، ٢)

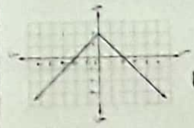
⑦

ر (س) = − (س − ٣)^{٣} + ١
• المجال = ح • المدى = ح
• الدالة تناقصية على ح
• الدالة ليست زوجية
وليست فردية
• نقطة التماثل هى (٣ ، ١)

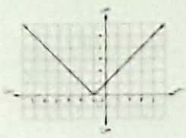
⑧

• المجال = ح • المدى = ح
• الدالة تزايدية على ح
• الدالة ليست زوجية وليست فردية
• نقطة التماثل هى (٠ ، −١)

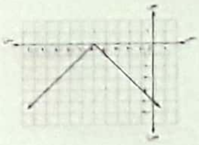
٣

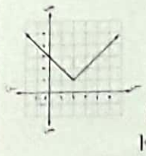
①

• المجال = ح
• المدى
= [١ ، ∞[
• الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠]
، الدالة تزايدية فى [٠ ، ∞[
• الدالة زوجية • معادلة محور التماثل هى س = ٠

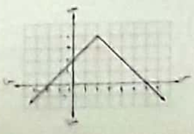
②

• المجال = ح
• المدى = [−٢ ، ∞[
• الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠]
، الدالة تزايدية فى [٠ ، ∞[
• الدالة زوجية • معادلة محور التماثل هى س = ٠

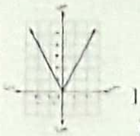
③

• المجال = ح
• المدى =]−∞ ، ٢]
• الدالة تناقصية
فى [٠ ، ∞[
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٠]
• الدالة زوجية
• معادلة محور التماثل هى س = ٠

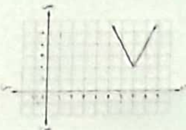
④

• المجال = ح
• المدى = [٠ ، ∞[
• الدالة تناقصية
فى]−∞ ، −١]
، الدالة تزايدية فى [−١ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية
• معادلة محور التماثل هى س = −١

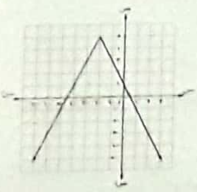
⑤

• المجال = ح
• المدى
=]−∞ ، ٠]
• الدالة تناقصية
فى [−٥ ، ∞[
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، −٥]
• الدالة ليست زوجية وليست فردية
• معادلة محور التماثل هى س = −٥

⑥

ر (س) = |س − ٢| + ١
• المجال = ح
• المدى = [١ ، ∞[
• الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٢]
، الدالة تزايدية فى [٢ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية
• معادلة محور التماثل هى س = ٢

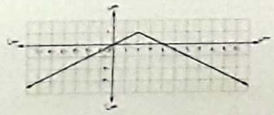
⑦

• المجال = ح
• المدى =]−∞ ، ٤]
• الدالة تناقصية
فى [٢ ، ∞[
، الدالة تزايدية فى]−∞ ، ٢]
• الدالة ليست زوجية وليست فردية
• معادلة محور التماثل هى س = ٢

⑧

• المجال = ح
• المدى = [٠ ، ∞[
• الدالة تناقصية فى]−∞ ، ٠]
، الدالة تزايدية فى [٠ ، ∞[
• الدالة زوجية
• معادلة محور التماثل هى س = ٠

⑨

• المجال = ح
• المدى = [٢ ، ∞[
• الدالة تناقصية
فى]−∞ ، ٧]
، الدالة تزايدية فى [٧ ، ∞[
• الدالة ليست زوجية وليست فردية
• معادلة محور التماثل هى س = ٧

⑩

• المجال = ح
• المدى =]−∞ ، ٥]
• الدالة تناقصية
فى [−٢ ، ∞[
، الدالة تزايدية
فى]−∞ ، −٢]
• الدالة ليست زوجية وليست فردية
• معادلة محور التماثل هى س = −٢

⑪ د(س) = ١ - $\frac{١}{٢}$ |س - ٢|



• المجال = ح • المدى =]-∞ ، ١]

• الدالة تناقصية في]٢ ، ∞[

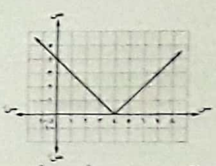
، الدالة تزايدية في]-∞ ، ٢[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• معادلة محور التماثل هي : س = ٢

⑫ ∵ د(س) = $\sqrt{س^٢ - ٨س + ١٦}$

= $\sqrt{(س - ٤)^٢}$ = |س - ٤|



• المجال = ح • المدى = [٠ ، ∞[

• الدالة تناقصية في]-∞ ، ٤[

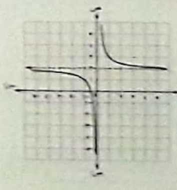
، الدالة تزايدية في]٤ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• معادلة محور التماثل هي : س = ٤

٤

①



• المجال = ح - {٠}

• المدى = ح - {٢}

• الدالة تناقصية

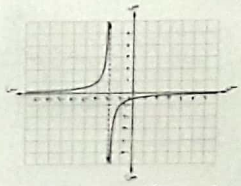
في]٠ ، ∞[

،]-∞ ، ٠[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هي : (٠ ، ٢)

②



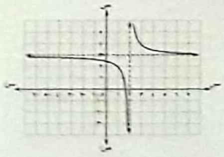
• المجال = ح - {-٢} • المدى = ح - {٠}

• الدالة تزايدية في]-∞ ، -٢[،]-٢ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هي : (-٢ ، ٠)

③



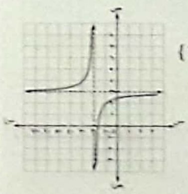
• المجال = ح - {٢} • المدى = ح - {٣}

• الدالة تناقصية في]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هي : (٢ ، ٣)

④



• المجال = ح - {-٢}

• المدى = ح - {٣}

• الدالة تزايدية

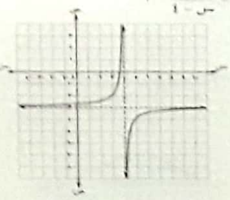
في]-∞ ، -٢[

،]-٢ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هي : (-٢ ، ٣)

⑤ د(س) = $\frac{-١}{س - ٤}$ - ٢



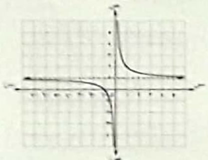
• المجال = ح - {٤} • المدى = ح - {-٢}

• الدالة تزايدية في]-∞ ، ٤[،]٤ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هي : (٤ ، -٢)

⑥ د(س) = ١ + $\frac{١}{س}$



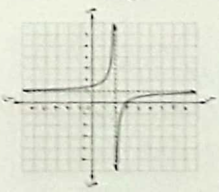
• المجال = ح - {٠} • المدى = ح - {١}

• الدالة تناقصية في]-∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هي : (٠ ، ١)

⑦ د(س) = ١ - $\frac{١}{س - ٢}$



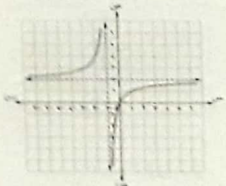
• المجال = ح - {٢} • المدى = ح - {١}

• الدالة تزايدية في]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هي : (٢ ، ١)

⑧ د(س) = ٢ - $\frac{٢}{س + ١}$



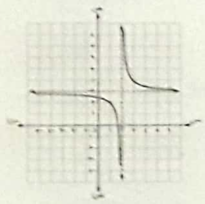
• المجال = ح - {-١} • المدى = ح - {٢}

• الدالة تزايدية في]-∞ ، -١[،]-١ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هي : (-١ ، ٢)

⑨ د(س) = ٢ + $\frac{١}{س - ٢}$



• المجال = ح - {٢} • المدى = ح - {٢}

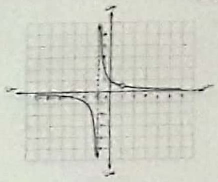
• الدالة تناقصية في]-∞ ، ٢[،]٢ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• نقطة التماثل هي : (٢ ، ٢)

⑩ ر (س) = $\frac{\text{س} - ١}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}$ = $\frac{١}{\text{س} + ١}$

، س ≠ ١



• المجال = ح - {-١ ، ١}   • المدى = ح - {٠ ، $\frac{١}{٢}$}

• الدالة تناقصية فى]-∞ ، -١[،]-١ ، ١[،]١ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

• لا توجد نقطة تماثل.

٥

• ر (س) = | س - ٢ | • ن (س) = | س | - ٢

• ع (س) = | س + ٣ | + ٢

٦

① د (س) = -١

② د (س) = س - ٢

③ د (س) = (س + ٢)^{٢} - ٣

④ د (س) = - (س - ١)^{٢} + ٢

⑤ د (س) = س^{٣}

⑥ د (س) = (س - ٢)^{٣}

⑦ د (س) = (س + ١)^{٣} - ٣

⑧ د (س) = | س - ٢ | - ٣

⑨ د (س) = - | س - ١ | + ٣

⑩ د (س) = $\frac{-١}{\text{س}}$

⑪ د (س) = $\frac{١}{\text{س}}$ + ٢

⑫ د (س) = $\frac{-١}{\text{س} + ٢}$ - ٢

٧

① (أ)	② (ب)	③ (جـ)	④ (جـ)
⑤ (ب)	⑥ (أ)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)
⑨ (جـ)	⑩ (جـ)	⑪ (جـ)	⑫ (أ)
⑬ (جـ)	⑭ (د)	⑮ (د)	⑯ (د)
⑰ (أ)			

٨

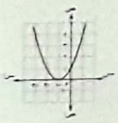
①

د$_{١}$ (س) = د (س + ١)

= (س + ١)^{٢}

• المجال = ح

• المدى = [٠ ، ∞[



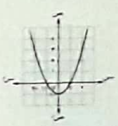
②

د$_{٢}$ (س) = د (س) - ١

= س^{٢} - ١

• المجال = ح

• المدى = [-١ ، ∞[



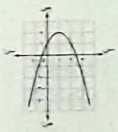
③

د$_{٣}$ (س) = ٢ - د (س - ١)

= ٢ - (س - ١)^{٢}

• المجال = ح

• المدى =]-∞ ، ٢]



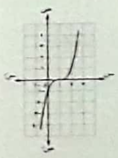
④

ر$_{١}$ (س) = ر (س - ١)

= (س - ١)^{٣}

• المجال = ح

• المدى = ح



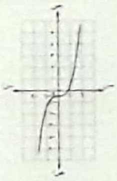
⑤

ر$_{٢}$ (س) = ر (س) - $\frac{١}{٢}$

= س^{٣} - $\frac{١}{٢}$

• المجال = ح

• المدى = ح



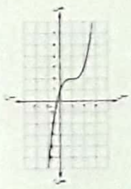
⑥

ر$_{٣}$ (س) = ر (س - ١) + ٢

= (س - ١)^{٣} + ٢

• المجال = ح

• المدى = ح



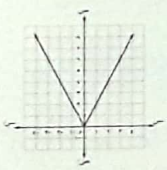
⑦

ن$_{١}$ (س) = ٢ ن (س)

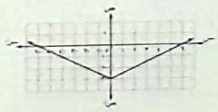
= ٢ | س |

• المجال = ح

• المدى = [٠ ، ∞[



⑧

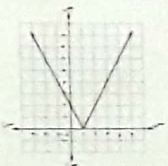


ن$_{٢}$ (س) = $\frac{١}{٢}$ ن (س) - ٢ = $\frac{١}{٢}$ | س | - ٢

• المجال = ح

• المدى = [-٢ ، ∞[

⑨

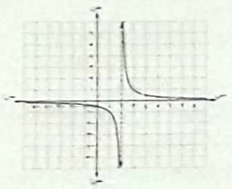


ن$_{٣}$ (س) = ٢ ن (س - ١) = ٢ | س - ١ |

• المجال = ح

• المدى = [٠ ، ∞[

⑩

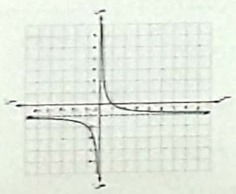


م$_{١}$ (س) = م (س - ٢) = $\frac{١}{\text{س} - ٢}$

• المجال = ح - {٢}

• المدى = ح - {٠}

⑪

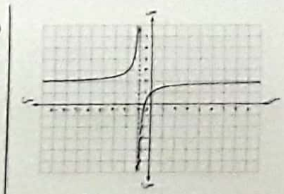


م$_{٢}$ (س) = م (س) - ١ = $\frac{١}{\text{س}}$ - ١

• المجال = ح - {٠}

• المدى = ح - {-١}

⑫



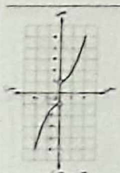
$ص(س) = ٢ - ن(س + ١) = ٢ - \frac{١}{س + ١}$

• المجال = ح - {-١}

• المدى = ح - {٢}

٩

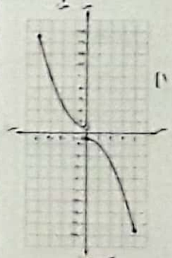
①



• المدى = ح - [-١ ، ١]

• الدالة تزايدية في ح - {٠}

②



• المدى

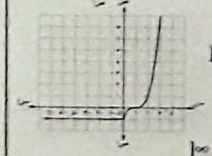
=]-١٧ ، ١٧[- [-١ ، ١]

• الدالة تناقصية

في]-٤ ، ٠[

]٠ ، ٤[

③



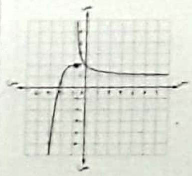
• المدى = [-١ ، ∞[

• الدالة ثابتة

في]-∞ ، ٠[

• وتزايدية في]٠ ، ∞[

④



• المدى = ح

• الدالة تناقصية

في]-١ ، ∞[

• وتزايدية

في]-∞ ، -١[

١٠

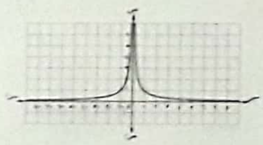
شكل (١) : $د(س) = |(س - ٢)^٣ - ١|$

شكل (٢) : $ن(س) = |س^٣|$

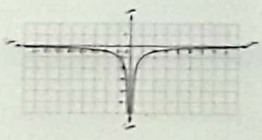
شكل (٣) : $ر(س) = \frac{١}{|س - ٢|}$

١١

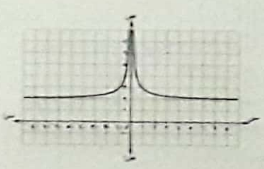
①



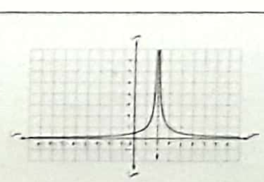
②



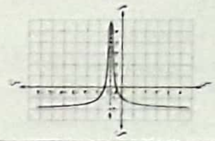
③



④

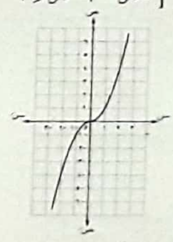


⑤

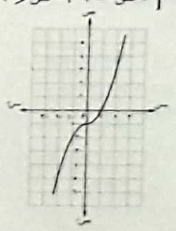


١٢

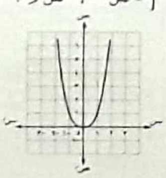
① $د(س) = \begin{cases} س^٢ ، & س \geq ٠ \\ -س^٢ ، & س < ٠ \end{cases}$



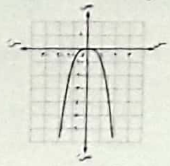
② $د(س) = \begin{cases} س^٢ - ١ ، & س \geq ٠ \\ -س^٢ - ١ ، & س < ٠ \end{cases}$



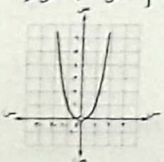
③ $د(س) = \begin{cases} س^٢ ، & س \geq ٠ \\ -س^٢ ، & س < ٠ \end{cases}$



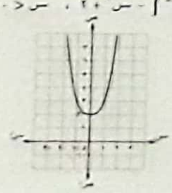
④ $د(س) = \begin{cases} -س^٢ ، & س \geq ٠ \\ س^٢ ، & س < ٠ \end{cases}$



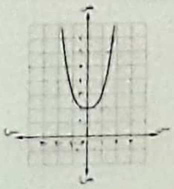
⑤ $د(س) = \begin{cases} س^٢ ، & س > ٠ \\ -س^٢ ، & س < ٠ \end{cases}$



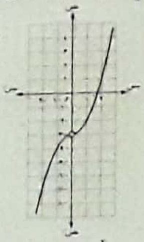
⑥ $د(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢ ، & س \geq ٠ \\ -س^٢ + ٢ ، & س < ٠ \end{cases}$



⑦ د (س) = { س^{٢} + ٢ ، س ≥ ٠ ؛ − س^{٢} + ٢ ، س < ٠ }

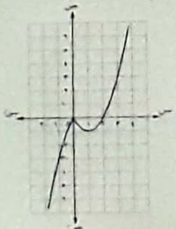


⑧ د (س) = { س^{٣} − ٣ ، س ≥ ٠ ؛ − س^{٢} − ٢ ، س < ٠ }



⑨ د (س) = { س^{٢} − ٢ س ، س ≥ ٠ ؛ − س^{٢} + ٢ س ، س < ٠ }

= { (س − ١)^{٢} − ١ ، س ≥ ٠ ؛ − (س − ١)^{٢} + ١ ، س < ٠ }



١٣

① د (س) = | س^{٢} − ٤ |

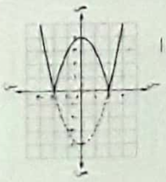
• المدى = [٠ ، ∞[

• الدالة تناقصية

في]−∞ ، −٢[

،]٠ ، ٢[

وتزايدية في]−٢ ، ٠[،]٢ ، ∞[



② د (س) = | س^{٢} − ٢ س − ٣ | ، س ∈ [−١ ، ٤]

• المدى = [٠ ، ٥]

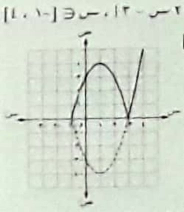
• الدالة تزايدية

في]−١ ، ١[

،]٣ ، ٤[

وتناقصية

في]١ ، ٣[



١٤

① (جـ) ② (ب) ③ (أ) ④ (جـ)
⑤ (ب) ⑥ (ب) ⑦ (ب) ⑧ (ب)
⑨ (جـ)

إرشادات لحل رقم ١٤

① ∵ المنحنى ر (س) هو نفسه منحنى د (س) بالانتقال ٣ وحدات يمينًا.

∴ كل نقطة من نقاطع تقاطع المنحنى د (س) مع محور السينات تنتقل ٣ وحدات يمينًا أيضًا.

∴ س ∈ {−٣ + ٣ ، ١ + ٣ ، ٠ + ٣}

أى س ∈ {٠ ، ٤ ، ٣}

② ∵ مدى الدالة التربيعية = [١ ، ∞[

∴ ب − ٢ = ١ ∴ ب = ٣

• ∵ المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، ٢)

∴ د (٣) = ٢

∴ (٣ − أ + ١)^{٢} + ١ = ٢

∴ (٤ − أ)^{٢} = ١ ∴ ٤ − أ = ± ١

∴ أ = ٤ ± ١ ∴ أ = ٣ أ، ٥

③ ∵ منحنى د (س) هو نفسه منحنى ر (س) بالانتقال وحدة واحدة يسارًا.

∴ الدالة تكون متزايدة في]−١ ، ∞[

④ المنحنى ص = ٢ (س − ٥)^{٢} + ٧ تحت تأثير انتقال ٣ وحدات يمينًا ووحدة لأسفل.

∴ ص = ٢ (س − ٥ − ٣)^{٢} + ٧ − ١

∴ ص = ٢ (س − ٨)^{٢} + ٦

⑤ ∵ (د ∘ د) (س) = د (د (س))

= د (| س | + ٢)

= || س | + ٢ | + ٢

= | س | + ٤

∴ مدى الدالة (د ∘ د) (س) هو [٤ ، ∞[

⑥ ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = | ½ س^{٢} − ٨ |

∴ مدى الدالة (د ∘ ر) (س) = [٠ ، ∞[

⑦ ∵ | د (س) | هو نفس منحنى د (س) بعد انعكاس الجزء المرسوم اسفل محور السينات لأعلى

أى أن الدالة | د (س) | تكون زوجية.

⑧ ∵ الدالة متماثلة حول نقطة الأصل.

∴ ر (س) = س٣ − ٢

∴ ر (س) تزايدية

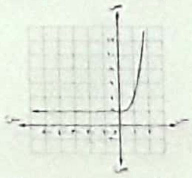
⑨ ∵ الدالة متماثلة حول محور الصادات

∴ ر (س) = − س^{٢} + ٢

١٥

① د (س) = { س^{٢} + س^{٢} ، ٢ ، س ≥ ٠ ؛ س^{٢} − س^{٢} + ٢ ، س < ٠ }

= { ٢ س^{٢} + ٢ ، س ≥ ٠ ؛ ٢ ، س < ٠ }



• المجال = ح • المدى = [٢ ، ∞[

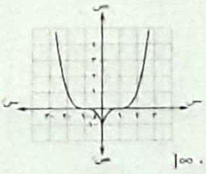
• الدالة ثابتة في]−∞ ، ٠]

، تزايدية في]٠ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

② د (س) = { (س − ١)^{٢} ، س ≥ ٠ ؛ (− س − ١)^{٢} ، س < ٠ }

= { (س − ١)^{٢} ، س ≥ ٠ ؛ (س + ١)^{٢} ، س < ٠ }



• المجال = ح

• المدى = [−١ ، ∞[

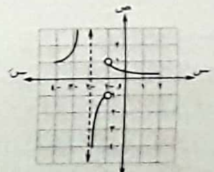
• الدالة تناقصية في]−∞ ، ٠]

وتزايدية في]٠ ، ∞[

• الدالة زوجية.

③ د (س) = { (س + ١) / ((س + ٢) (س + ١)) ، س > −١ ؛ −(س + ١) / ((س + ٢) (س + ١)) ، س < −١ ، س ≠ −٢ }

= { ١ / (س + ٢) ، س > −١ ؛ − ١ / (س + ٢) ، س < −١ ، س ≠ −٢ }



• المجال = ح - {-١ ، -٢}

• المدى = ح - [-١ ، ٠]

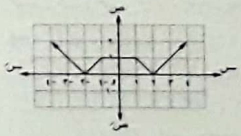
• الدالة تزايدية فى كل من

]-∞ ، -٢[،]-٢ ، -١[

، وتناقصية فى]-١ ، ∞[

• الدالة ليست زوجية وليست فردية.

④ د (س) =
- - س - ٢ ، س < -٢
- س + ٢ ، -٢ ≤ س ≤ -١
- ١ ، -١ < س < ١
- - س + ٢ ، ١ ≤ س < ٢
- س - ٢ ، س ≥ ٢



• المجال = ح

• المدى = [٠ ، ∞[

• الدالة تناقصية فى كل من

]-∞ ، -٢] ،]١ ، ٢[

، وتزايدية فى كل من]-٢ ، -١[،]٢ ، ∞[

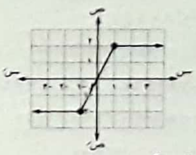
، وثابتة فى]-١ ، ١[

• الدالة زوجية.

⑤ د (س) = |س + ١| - |س - ١|

=
- ٢ ، س > ١
- ٢ س ، -١ ≤ س ≤ ١
- -٢ ، س < -١

	(-١)		(١)	
- س - ١		س + ١		س + ١
- س + ١		- س + ١		س - ١
-٢		٢ س		٢



• المجال = ح

• المدى = [-٢ ، ٢]

• الدالة ثابتة فى كل من]- ∞ ، -١[،]١ ، ∞[

وتزايدية فى]-١ ، ١[

• الدالة فردية.

إجابات تمارين 6

أولا تمارين على حل معادلات القيمة المطلقة

١

① ٤ |س| = ٢٠ ∴ |س| = ٥

∴ س = ± ٥ ∴ مجموعة الحل = {٥ ، -٥}

② |٢ س - ٣| = ٧ ∴ ٢ س - ٣ = ± ٧

∴ ٢ س - ٣ = ٧ ومنها ٢ س = ١٠

∴ س = ٥

أ، ٢ س - ٣ = - ٧ ومنها ٢ س = -٤

∴ س = -٢

∴ مجموعة الحل = {٥ ، -٢}

③ |س + ٢| = ١ ∴ س + ٢ = ± ١

∴ س = -١ أ، س = -٣

∴ مجموعة الحل = {-١ ، -٣}

④ ٣ |س| = ٣ ∴ |س| = ١

∴ س = ± ١

∴ مجموعة الحل = {١ ، -١}

⑤ عندما س ≥ ٢ ∴ س - ٢ = ٣ س - ٤

∴ ٢ س = ٢ ∴ س = ١ ∉]٢ ، ∞[

عندما س < ٢ ∴ - س + ٢ = ٣ س - ٤

∴ ٤ س = ٦ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$ ∈]- ∞ ، ٢[

∴ مجموعة الحل = {$\frac{٣}{٢}$}

⑥ عندما س ≥ - ٢ ∴ س + ٢ = س - ١ (مرفوض)

عندما س < - ٢ ∴ - س - ٢ = س - ١

∴ ٢ س = -١ ∴ س = - $\frac{١}{٢}$ ∉]- ∞ ، -٢[

∴ مجموعة الحل = ∅

⑦ عندما س ≥ -٢ ∴ س + ٢ = - س + ٢

∴ ٢ س = ٠ ∴ س = ٠ ∈ [-٢ ، ∞[

عندما س < -٢

∴ - س - ٢ = - س + ٢ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٠}

⑧ ∵ ٢ |س| = ٥ س - ٢١

عندما س ≥ ٠ ∴ ٢ س = ٥ س - ٢١

∴ ٣ س = ٢١ ∴ س = ٧ ∈ [٠ ، ∞[

عندما س < ٠ ∴ - ٢ س = ٥ س - ٢١

∴ ٧ س = ٢١ ∴ س = ٣ ∉]- ∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {٧}

⑨ |س + ٥| = |س - ٣|

∴ س + ٥ = ± (س - ٣)

∴ س + ٥ = س - ٣ (مرفوض)

أ، س + ٥ = - س + ٣ ∴ ٢ س = -٢

∴ س = -١ (تحقق) ∴ مجموعة الحل = {-١}

⑩ ∵ |٢ (س - ٣)| = |س - ٣|

∴ ٢ |س - ٣| = |س - ٣|

∴ |س - ٣| = ٠ ∴ س - ٣ = ٠

∴ س = ٣ ∴ مجموعة الحل = {٣}

⑪ |س - ١| = ٢ |س - ٢|

∴ س - ١ = ± ٢ (س - ٢)

∴ س - ١ = ٢ س - ٤ ∴ س = ٣ (تحقق)

أ، س - ١ = -٢ س + ٤ ∴ ٣ س = ٥

∴ س = $\frac{٥}{٣}$ (تحقق)

∴ مجموعة الحل = {٣ ، $\frac{٥}{٣}$}

⑫ عندما س ≥ ٠ ∴ $س^٢$ - ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س - ٢) (س - ٣) = ٠

∴ س = ٢ ∈ [٠ ، ∞[أ، س = ٣ ∈ [٠ ، ∞[

عندما س < ٠ ∴ $س^٢$ + ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س + ٢) (س + ٣) = ٠

∴ س = -٢ ∈]- ∞ ، ٠[

أ، س = -٣ ∈]- ∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {٢ ، ٣ ، -٢ ، -٣}

⑬ ∵ $\sqrt{س^٢}$ - ٢ س = ٦

∴ |س| - ٢ س = ٦

عندما س ≥ ٠ ∴ س - ٢ س = ٦

∴ س = -٦ ∉ [٠ ، ∞[

عندما س < ٠ ∴ - س - ٢ س = ٦

∴ ٢ س = -٦ ∴ س = -٢ ∈]-∞ ، ٠]

∴ مجموعة الحل = {-٢}

⑭ ∵ √(س^{٢} - ٤ س + ٤) = ٤

∴ √((س - ٢)^{٢}) = ٤ ∴ |س - ٢| = ٤

∴ س - ٢ = ± ٤

∴ س - ٢ = ٤ ∴ س = ٦

أ، س - ٢ = -٤ ∴ س = -٢

∴ مجموعة الحل = {-٢ ، ٦}

⑮ |س| + س = ٠

عندما س ≥ ٠ : ∴ س + س = ٠

∴ ٢ س = ٠ ∴ س = ٠ ∈ [٠ ، ∞[

عندما س < ٠ : ∴ - س + س = صفر

∴ صفر = صفر وذلك متحقق لجميع قيم س < ٠

∴ مجموعة الحل =]-∞ ، ٠]

⑯ عندما س ≥ -٣ : س + ٣ + ٢ س = ٠

∴ ٣ س = -٣ ∴ س = -١ ∈ [-٣ ، ∞[

عندما س < -٣ : ∴ - س - ٣ + ٢ س = ٠

∴ س = ٣ ∉]-∞ ، -٣[

∴ مجموعة الحل = {-١}

⑰ ∴ √(س^{٢} - ٦ س + ٩) + ٢ س = ٩

∴ √((س - ٣)^{٢}) + ٢ س = ٩

∴ |س - ٣| + ٢ س = ٩

عندما س ≥ ٣ : ∴ س - ٣ + ٢ س = ٩

∴ ٣ س = ١٢ ∴ س = ٤ ∈ [٣ ، ∞[

عندما س < ٣ : ∴ - س + ٣ + ٢ س = ٩

∴ س = ٦ ∉]-∞ ، ٣[

∴ مجموعة الحل = {٤}

⑱ |س - ٣| (|س - ٢| - ١) = ٠

∴ |س - ٣| = ٠ ومنها س = ٣

أ، |س - ٣| - ١ = ٠ ∴ |س - ٣| = ١

∴ س - ٣ = ± ١ ومنها س = ٢ أ، س = ٤

∴ مجموعة الحل = {٣ ، ٢ ، ٤}

⑲ ∵ ٥ |س - ٣| - ٢ √((س - ٣)^{٢}) = ١٢

∴ ٥ |س - ٣| - ٢ |س - ٣| = ١٢

∴ ٣ |س - ٣| = ١٢ ∴ |س - ٣| = ٤

∴ س - ٣ = ± ٤ ومنها س = ٧ أ، س = -١

∴ مجموعة الحل = {٧ ، -١}

⑳ |س - ١| |س + ١| = |س - ١|

∴ |س - ١| (|س + ١| - ١) = ٠

∴ |س - ١| = ٠ ومنها س = ١

أ، |س + ١| - ١ = ٠ ∴ |س + ١| = ١

∴ س + ١ = ± ١

ومنها س = ٠ أ، س = -٢

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٠ ، -٢}

㉑ |س^{٢} - ١| = ٢٦ ∴ س^{٢} - ١ = ± ٢٦

∴ س^{٢} = -٢٥ (مرفوض) أ، س^{٢} = ٢٧

ومنها س = ± ٣ √٣

∴ مجموعة الحل = {٣ √٣ ، -٣ √٣}

㉒ (|س + ١| + ٢) (|س + ١| - ٥) = ٠

∴ |س + ١| + ٢ = ٠

∴ |س + ١| = -٢ (مرفوض)

أ، |س + ١| - ٥ = ٠ ∴ |س + ١| = ٥

∴ س + ١ = ± ٥ ومنها س = ٤ أ، س = -٦

∴ مجموعة الحل = {٤ ، -٦}

㉓ |س - ٥|^{٢} = ٢ |س - ٥|

∴ |س - ٥| (|س - ٥| - ٢) = ٠

∴ |س - ٥| = ٠ ومنها س = ٥

أ، |س - ٥| - ٢ = ٠ ∴ |س - ٥| = ٢

ومنها س - ٥ = ± ٢

∴ س = ٧ أ، س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٥ ، ٧ ، ٣}

㉔ ∵ س |س| - س = ٠

∴ س (|س| - ١) = ٠

∴ س = ٠ أ، |س| - ١ = ٠

∴ |س| = ١ ∴ س = ± ١

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ١ ، -١}

㉕ س |س - ٥| - ٦ = ٠

عندما س ≥ ٥ : ∴ س^{٢} - ٥ س - ٦ = ٠

∴ (س - ٦) (س + ١) = ٠

∴ س = ٦ ∈ [٥ ، ∞[أ، س = -١ ∉ [٥ ، ∞[

عندما س < ٥ : - س^{٢} + ٥ س - ٦ = ٠

∴ س^{٢} - ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س - ٢) (س - ٣) = ٠

∴ س = ٢ ∈]-∞ ، ٥[

أ، س = ٣ ∈]-∞ ، ٥[

∴ مجموعة الحل = {٦ ، ٢ ، ٣}

㉖ س^{٢} + س - ١٠ = ± ١٠

∴ س^{٢} + س - ١٠ = -١٠

∴ س^{٢} + س = ٠ ∴ س (س + ١) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = -١

أ، س^{٢} + س - ١٠ = ١٠

∴ س^{٢} + س - ٢٠ = ٠

∴ (س + ٥) (س - ٤) = ٠

∴ س = -٥ أ، س = ٤

∴ مجموعة الحل = {٠ ، -١ ، -٥ ، ٤}

㉗ س |س - ٢| = ٤ س - ٨

عندما س ≥ ٢ : ∴ س (س - ٢) = ٤ س - ٨

∴ س^{٢} - ٢ س - ٤ س + ٨ = ٠

∴ س^{٢} - ٦ س + ٨ = ٠

∴ (س - ٢) (س - ٤) = ٠

∴ س = ٢ ∉]٢ ، ∞[

أ، س = ٤ ∈]٢ ، ∞[

عندما س < ٢ : ∴ س (- س + ٢) = ٤ س - ٨

∴ - س^{٢} + ٢ س = ٤ س - ٨

∴ س^{٢} + ٢ س - ٨ = ٠

∴ (س + ٤) (س - ٢) = ٠

∴ س = -٤ ∈]-∞ ، ٢[

أ، س = ٢ ∉]-∞ ، ٢[

∴ مجموعة الحل = {٤ ، -٤}

㉘ س^{٢} |س| = ٨ س

عندما س ≥ ٠ : ∴ س^{٢} × س = ٨ س

∴ س^{٤} - ٨ س = ٠ ∴ س (س^{٣} - ٨) = ٠

∴ س = ٠ ∈ [٠ ، ∞[

أ، س^{٣} - ٨ = ٠ ∴ س^{٣} = ٨

∴ س = ٢ ∈ [٠ ، ∞[

عندما س < ٠ : ∴ س^{٢} × - س = ٨ س

∴ س^{٤} + ٨ س = ٠ ∴ س (س^{٣} + ٨) = ٠

∴ س = ٠ ∉]-∞ ، ٠[

أ، س^{٣} + ٨ = ٠ ∴ س^{٣} = -٨

∴ س = −٢ ∈]−∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {−٢ ، ٠ ، ٢}

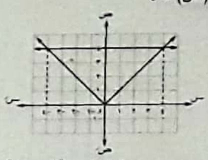
٢

• تم الحل بيانيًا وعليك التحقق جبريًا بنفسك.

• نرسم منحنيي الدالتين د (س) ، ر (س) فتكون الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيين هي مجموعة حل المعادلة.

① ∵ |س| = ٤ ∴ د (س) = |س|

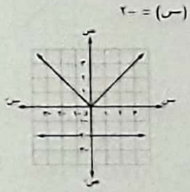
، ر (س) = ٤



من الرسم : مجموعة الحل = {٤ ، −٤}

② ∵ |س| = −٢ ∴ د (س) = |س|

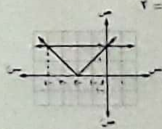
، ر (س) = −٢



من الرسم : مجموعة الحل = ∅

③ ∵ |س + ٢| = ٢ ∴ د (س) = |س + ٢|

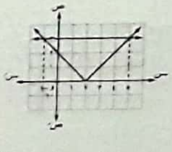
، ر (س) = ٢



من الرسم : مجموعة الحل = {٠ ، −٤}

④ ∵ $\sqrt{(س - ٢)^{٢}}$ = ٢ ∴ |س − ٢| = ٢

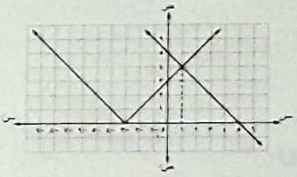
∴ د (س) = |س − ٢| ، ر (س) = ٢



من الرسم : مجموعة الحل = {٥ ، −١}

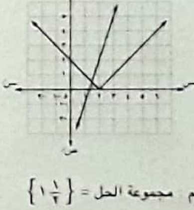
⑤ ∵ |س + ٣| = ٥ − س

∴ د (س) = |س + ٣| ، ر (س) = ٥ − س



من الرسم : مجموعة الحل = {١}

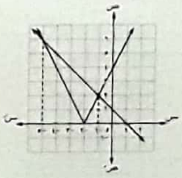
⑥ د (س) = |س − ٢| ، ر (س) = ٣ س − ٤



من الرسم : مجموعة الحل = {$١\frac{١}{٢}$}

⑦ د (س) = ٢ |س + ٢|

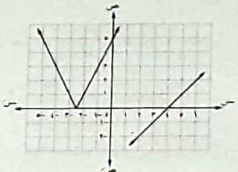
، ر (س) = −١ − س



من الرسم : مجموعة الحل = {−١ ، −٥}

⑧ د (س) = ٢ |س + $\frac{٥}{٢}$|

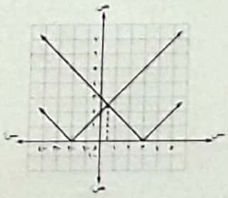
، ر (س) = س − ٤



من الرسم : مجموعة الحل = ∅

⑨ د (س) = |س + ٢|

، ر (س) = |س − ٣|

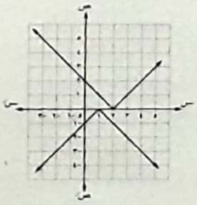


من الرسم : مجموعة الحل = {$\frac{١}{٢}$}

⑩ ∵ |س − ٢| = − |س − ١|

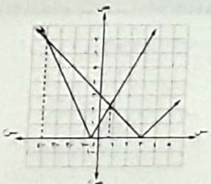
∴ د (س) = |س − ٢|

، ر (س) = − |س − ١|



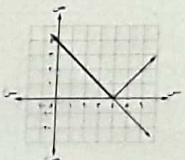
من الرسم : مجموعة الحل = ∅

⑪ د (س) = |س − ٣| ، ر (س) = |٢ س + ١|



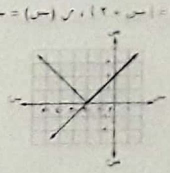
من الرسم : مجموعة الحل = {−٤ ، $\frac{٢}{٣}$}

⑫ د (س) = |س − ٤| ، ر (س) = ٤ − س



من الرسم : مجموعة الحل =]−∞ ، ٤]

(١٣) د(س) = |س + ٢| ، ر(س) = س + ٢

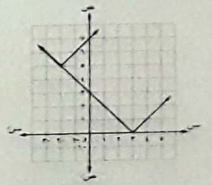


من الرسم مجموعة الحل = [-٢ ، ∞[

(١٤) ∵ |س − ٢| = |س + ٢| + ٥

∴ د(س) = |س − ٢|

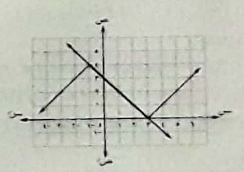
، ر(س) = |س + ٢| + ٥



من الرسم مجموعة الحل =]-∞ ، -٢]

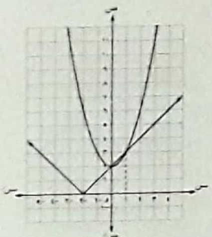
(١٥) د(س) = |س − ٢|

، ر(س) = ٤ − |س + ١|



من الرسم مجموعة الحل = [-١ ، ٣]

(١٦) د(س) = |س + ٢| ، ر(س) = $س^٢$ + ٢



من الرسم مجموعة الحل = {٠ ، ١}

٣

د(− س) = $\frac{١٢}{|-س|+٢}$ = $\frac{١٢}{|س|+٢}$ = د(س)

∴ الدالة زوجية.

∵ د(س) = ٢ ∴ $\frac{١٢}{|س|+٢}$ = ٢

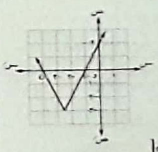
∴ |س| + ٢ = ٦ ∴ |س| = ٤

∴ س = ±٤

∴ مجموعة الحل = {-٤ ، ٤}

٤

د(س) = ٢ |س + $\frac{٥}{٢}$| − ٣



من الرسم

- المدى = [-٣ ، ∞[
- الدالة تناقصية في]-∞ ، -$\frac{٥}{٢}$[
- ، وتزايدية في]-$\frac{٥}{٢}$ ، ∞[
- مجموعة الحل = {-١ ، -٤}

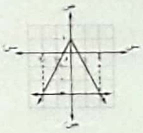
الحل الجبري ∵ |٢ س + ٥| = ٣

∴ ٢ س + ٥ = ±٣

∴ ٢ س + ٥ = ٣ ومنها س = -١

أو ٢ س + ٥ = -٣ ومنها س = -٤

٥



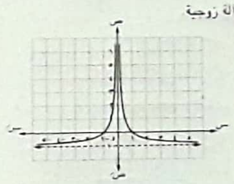
من الرسم

- المدى =]-∞ ، ١]
- الدالة تزايدية في]-∞ ، ٠[
- ، وتناقصية في]٠ ، ∞[
- الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات.
- مجموعة الحل = {-٢ ، ٢} ويمكنك التحقق منها جبريًا.

٦

د(− س) = $\frac{١ - |-س|}{|-س|}$ = $\frac{١ - |س|}{|س|}$ = د(س)

∴ الدالة زوجية

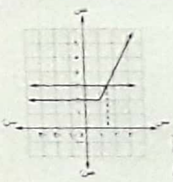


∴ د(س) = $\frac{١ - |س|}{|س|}$ = $\frac{١}{|س|}$ − ١

من الرسم مجموعة الحل = {-١ ، ١}

٧

د(س) = { ٢ س ، س ≥ ١
　　　　 ٢ ، س < ١

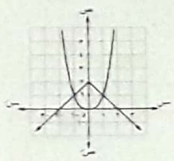


من الرسم

- المدى = [٢ ، ∞[
- الدالة ثابتة في]-∞ ، ١[
- ، وتزايدية في]١ ، ∞[
- مجموعة الحل = {$\frac{٣}{٢}$}

٨

د(س) = { $س^٣$ ، س ≥ ٠
　　　　 −$س^٣$ ، س < ٠



من الرسم مجموعة الحل = {-١ ، ١}

ثانيًا تمارين على حل متباينات القيمة المطلقة

٩

(١) -٥ ≥ س − ٣ ≥ ٥ ∴ -٢ ≥ س ≥ ٨

∴ مجموعة الحل = [-٢ ، ٨]

(٢) س − ٣ ≤ ٥ ومنها س ≤ ٨

أو س − ٣ ≥ -٥ ومنها س ≥ -٢

∴ مجموعة الحل = ح −]-٢ ، ٨[

(٣) ٢ س + ٥ > ٣ ومنها س > -١

أو ٢ س + ٥ < -٣ ومنها س < -٤

مجموعة الحل = ح − [-٤ ، -١]

(٤) ∴ |س − ٣| < ٧ ∴ -٧ < س − ٣ < ٧

∴ -٤ < س < ١٠

∴ مجموعة الحل =]-٤ ، ١٠[

⑤ -١ ≥ (س - ٢)/٤ ≥ ١

∴ -٤ ≥ س - ٢ ≥ ٤ ∴ -١ ≥ س ≥ ٧

∴ مجموعة الحل = [-١ ، ٧]

⑥ |٢ س + ٢| < -١ ∴ مجموعة الحل = ∅

⑦ ∵ ١/|٢ س - ٥| ≤ ٣ ∴ |٢ س - ٥| ≥ ١/٣

∴ -١/٣ ≥ ٢ س - ٥ ≥ ١/٣

∴ ٤ ٢/٣ ≥ ٢ س ≥ ٥ ١/٣ ∴ ٧/٣ ≥ س ≥ ٨/٣

، ∵ |٢ س - ٥| = ٠ عندما س = ٥/٢

∴ مجموعة الحل = [٧/٣ ، ٨/٣] - {٥/٢}

⑧ ∵ ١/|٣ س| ≤ ٥ ∴ |٣ س| ≥ ١/٥

∴ -١/٥ ≥ ٣ س ≥ ١/٥ ∴ -١/١٥ ≥ س ≥ ١/١٥

، ∵ |٣ س| = ٠ عندما س = ٠

∴ مجموعة الحل = [-١/١٥ ، ١/١٥] - {٠}

⑨ ∵ ١/|٢ س - ٣| > ٢ ∴ |٢ س - ٣| < ١/٢

∴ -١/٢ < ٢ س - ٣ < ١/٢

∴ ٥/٢ < ٢ س < ٧/٢ ∴ ٥/٤ < س < ٧/٤

، ∵ |٢ س - ٣| = ٠ عندما س = ٣/٢

∴ مجموعة الحل =]٥/٤ ، ٧/٤[- {٣/٢}

⑩ |٢ س - ٣| > ٤

∴ ٢ س - ٣ > ٤ ومنها س > ٧/٢

أو ٢ س - ٣ < -٤ ومنها س < -١/٢

∴ مجموعة الحل = ح - [-١/٢ ، ٧/٢]

⑪ ∵ √(س - ١)^٢ ≤ ٤ ∴ |س - ١| ≤ ٤

∴ س - ١ ≤ ٤ ومنها س ≤ ٥

أو س - ١ ≥ -٤ ومنها س ≥ -٣

∴ مجموعة الحل = ح -]-٣ ، ٥[

⑫ ∵ √(٢ س - ٣)^٢ ≥ ٩ ∴ |٢ س - ٣| ≥ ٩

∴ -٩ ≥ ٢ س - ٣ ≥ ٩

∴ -٦ ≥ ٢ س ≥ ١٢ ∴ -٣ ≥ س ≥ ٦

∴ مجموعة الحل = [-٣ ، ٦]

⑬ ٢ |س - ٢| < ٦ ∴ |س - ٢| < ٣

∴ -٣ < س - ٢ < ٣ ∴ -١ < س < ٥

∴ مجموعة الحل =]-١ ، ٥[

⑭ |٣ س - ٢| + ٢ × ٢ |٣ س - ٢| ≤ ٢٠

∴ ٥ |٣ س - ٢| ≤ ٢٠

∴ |٣ س - ٢| ≤ ٤

∴ ٣ س - ٢ ≤ ٤ ومنها س ≤ ٢

أو ٣ س - ٢ ≥ -٤ ومنها س ≥ -٢/٣

∴ مجموعة الحل = ح -]-٢/٣ ، ٢[

⑮ |س + ٢| + ٢ |س + ٢| ≤ ٦

∴ ٣ |س + ٢| ≤ ٦ ∴ |س + ٢| ≤ ٢

∴ س + ٢ ≤ ٢ ومنها س ≤ ٠

أو س + ٢ ≥ -٢ ومنها س ≥ -٤

∴ مجموعة الحل = ح -]-٤ ، ٠[

١٠

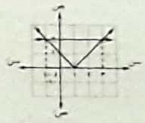
①]-٤ ، ٠] ② ح - [-١ ، ٥]

③ [-٥ ، -١]

١١

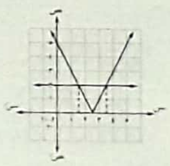
تم الحل بيانياً وعليك التحقق جبرياً بنفسك

① د (س) = |س - ١| ، ر (س) = ٢



من الرسم مجموعة الحل =]-١ ، ٣[

② د (س) = ٢ |س - ٥/٢| ، ر (س) = ٢



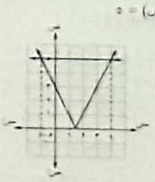
من الرسم مجموعة الحل = ح -]٣/٢ ، ٧/٢[

③ ∵ √(٤ س^٢ - ١٢ س + ٩) = √(٢ س - ٣)^٢

= |٢ س - ٣|

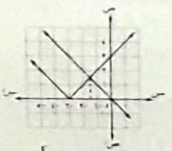
∴ د (س) = |٢ س - ٣| = ٢ |س - ٣/٢|

، ر (س) = ٥



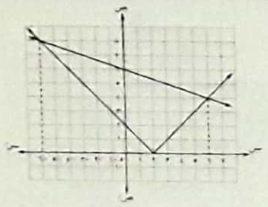
من الرسم مجموعة الحل = ح - [-١ ، ٤]

④ د (س) = |س + ٢| ، ر (س) = - س



من الرسم مجموعة الحل =]-∞ ، -٣/٢[

⑤ د (س) = |س - ٢| ، ر (س) = -١/٢ س + ٦

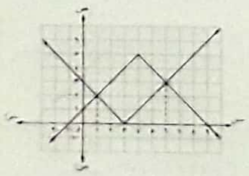


من الرسم مجموعة الحل =]-٦ ، ٦[

⑥ ∵ |س - ٣| > ٥ - |س - ٤|

∴ د (س) = |س - ٣|

، ر (س) = ٥ - |س - ٤|



من الرسم مجموعة الحل = ح - [١ ، ٦]

١٢

① ∵ -٤ ≥ س ≥ ٤ ∴ |س| ≥ ٤

② ∵ ٠ < س < ٦ بإضافة (−٣) إلى أطراف المتباينة.

∴ −٣ < س − ٣ < ٣ ∴ |س − ٣| < ٣

③ ∵ س ≥ −٢ أ، س ≤ ٢ ∴ |س| ≤ ٢

④ ∵ س ∈ ح − [−٢ ، ٦]

∴ س > ٦ ، س < −٢

وبإضافة (−٢) إلى أطراف المتباينة

∴ س − ٢ > ٤ ، س − ٢ < −٤

∴ |س − ٢| > ٤

١٣

① نفرض أن درجة الطالب = س درجة

∴ ٦٠ < س < ١٠٠

وبإضافة (− ٨٠) إلى أطراف المتباينة

∴ −٢٠ < س − ٨٠ < ٢٠

∴ |س − ٨٠| < ٢٠

② نفرض أن درجة الحرارة = س درجة

∴ ٣٥ < س < ٤٢

وبإضافة (− ٣٨.٥) إلى أطراف المتباينة

∴ − ٣.٥ < س − ٣٨.٥ < ٣.٥

∴ |س − ٣٨.٥| < ٣.٥

③ نفرض أن العمق الذي تعيش فيه الطحالب الخضراء = س مترًا

∴ ٠ ≤ س ≤ ٣٠

وبإضافة (−١٥) إلى أطراف المتباينة

∴ −١٥ ≤ س − ١٥ ≤ ١٥

∴ |س − ١٥| ≤ ١٥

ثالثًا تمارين متنوعة

١٤

① بوضع |س| − ١ = ٠ ∴ |س| = ١

∴ س = ± ١

∴ المجال = ح − {١ ، −١}

② بوضع |س| + ١ = ٠ ∴ |س| = −١ (تعارض)

∴ المجال = ح

③ بوضع |س − ٢| − ٥ = ٠ ∴ |س − ٢| = ٥

∴ س − ٢ = ٥ ومنها س = ٧

أ، س − ٢ = −٥ ومنها س = −٣

∴ المجال = ح − {٧ ، −٣}

④ بوضع ٥ − |س| ≥ ٠ ∴ |س| ≤ ٥

∴ −٥ ≤ س ≤ ٥ ∴ المجال = [−٥ ، ٥]

⑤ بوضع |س| − ٥ ≥ ٠ ∴ |س| ≥ ٥

∴ س ≥ ٥ أ، س ≤ −٥

∴ المجال = ح −]−٥ ، ٥[

⑥ بوضع ٥ − |س| > ٠ ∴ |س| < ٥

∴ −٥ < س < ٥ ∴ المجال =]−٥ ، ٥[

١٥

① د (− س) = − س |− س| = − س |س|

= − د (س) ∴ الدالة فردية.

② د (− س) = (− س)² |− س| − ١

= س² |س| − ١ = د (س) ∴ الدالة زوجية.

③ د (− س) = (|١ − س| + |١ + س|) / (|١ − س| − |١ + س|) = − د (س)

∴ الدالة فردية.

④ د (− س) = ((− س)² جا (− ٢ س)) / (٥ + |−٢ س|)

= (س² جا ٢ س) / (٥ + |٢ س|) = د (س)

∴ الدالة زوجية.

⑤ د (− س)

= ٢ |− س| طا (− س) + ٢ (− س) | طا (− س) |

= ٢ |س| (− طا س) − ٢ س | − طا س |

= −٢ |س| طا س − ٢ س | طا س |

= − د (س) ∴ الدالة فردية.

⑥ د (− س) = √(|− س| + (− س)) = √(|س| − س)

≠ د (س) ≠ − د (س)

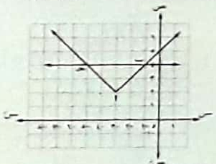
∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية.

١٦

① (ب)	② (ب)	③ (جـ)	④ (جـ)	⑤ (جـ)
⑥ (أ)	⑦ (د)	⑧ (ب)	⑨ (د)	⑩ (جـ)

١٧

① د (س) = |س + ٣| + ٢ ، ر (س) = ٤

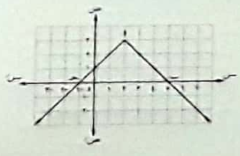


∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المثلث أ ب جـ = ½ × ٤ × ٢

= ٤ وحدة مربعة.

② د (س) = − |س − ٢| + ٣ ، ر (س) = صفر



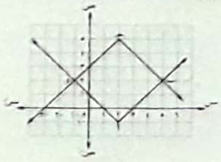
∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المثلث أ ب جـ

= ½ × ٦ × ٣ = ٩ وحدة مربعة.

③ د (س) = |س − ٢| − ١

، ر (س) = ٥ − |س − ٢|



∴ مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين د ، ر

= مساحة سطح المربع أ ب جـ ء = ½ (ب ء)²

= ½ × ٦² = ١٨ وحدة مربعة.

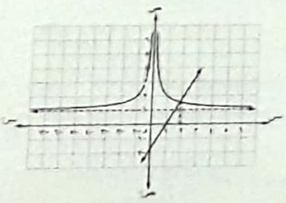
١٨

د (− س) = (|− س| + ١) / |− س| = (|س| + ١) / |س| = د (س)

∴ الدالة زوجية. ∵ د (س) = (|س| + ١) / |س| = ١ + ١ / |س|

بيانيًا

وبوضع ر (س) = ٢ س − ٢



من الرسم : س = ١.٨

∴ مجموعة الحل = {١.٨}

جبريًا ∵ د(س) = { $\frac{١}{س}$ + ١ ، س > ٠ ؛ $\frac{-١}{س}$ + ١ ، س < ٠ }

عندما س > ٠ ∴ $\frac{١}{س}$ + ١ = ٢ س - ٢

∴ $\frac{١}{س}$ = ٢ س - ٣ (بالضرب في س)

∴ ١ = ٢ س² - ٣ س

∴ ٢ س² - ٣ س - ١ = ٠

∴ س = $\frac{٣ \pm \sqrt{٩ - ٤ \times ٢ \times -١}}{٢ \times ٢}$ = $\frac{٣ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$

∴ س = ١,٨ ∈]٠ ، ∞[

أ، س = -٠,٣ ∉]٠ ، ∞[

عندما س < ٠ ∴ $\frac{-١}{س}$ + ١ = ٢ س - ٢

∴ $\frac{-١}{س}$ = ٢ س - ٣ (بالضرب في س)

∴ -١ = ٢ س² - ٣ س

∴ ٢ س² - ٣ س + ١ = ٠

∴ (٢ س - ١)(س - ١) = ٠

∴ س = $\frac{١}{٢}$ ∉]-∞ ، ٠[

أ، س = ١ ∉]-∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل = {١,٨}

١٩

(١) (د) (٢) (د) (٣) (جـ) (٤) (جـ) (٥) (د)

(٦) (أ) (٧) (أ) (٨) (جـ) (٩) (ب)

إرشادات لحل رقم ١٩

(١) ∵ |س + ١|² + |٢ س + ٣| = ٠

∴ س + ١ = ٠ ومنها س = -١

وفي نفس الوقت يكون ٢ س + ٣ = ٠ ومنها س = $\frac{-٣}{٢}$

وهذا تعارض.

∴ م.ح = ∅

(٢) ∵ |(س - ١)(س - ٣)| = |س - ٣|

∴ |س - ٣||س - ١| - |س - ٣| = ٠

∴ |س - ٣|(|س - ١| - ١) = ٠

∴ |س - ٣| = ٠ ومنها س = ٣

أ، |س - ١| = ١

∴ س - ١ = ±١ ومنها س = ٠ أ، ٢

∴ م.ح = {٠ ، ٢ ، ٣}

(٣) ∵ |س| + |ص| ≥ |س + ص|

∴ $\frac{|س| + |ص|}{|س + ص|}$ ≥ ١

∴ أصغر قيمة للمقدار $\frac{|س| + |ص|}{|س + ص|}$ هي ١

(٤) ∵ ٣٢ < ٦١ < ٦٤

∴ ٢⁵ < ٢^س < ٢⁶ ∴ ٥ < س < ٦

∴ |س - ٦| = -س + ٦

، |س - ٥| = س - ٥

∴ |س - ٦| + |س - ٥|

= -س + ٦ + س - ٥ = ١

(٥) ∵ أ² ب > ٠ ∴ ب موجبة.

، ∵ $\frac{أ}{ب}$ < ٠ ∴ أ سالبة.

∴ $\sqrt{أ^٢}$ = |أ| = -أ ، $\sqrt{ب^٢}$ = |ب| = ب

∴ $\sqrt{أ^٢}$ + $\sqrt{ب^٢}$ - (ب - أ)

= -أ + ب - ب + أ = صفر

(٦) ∵ -٤ ≤ س ≤ ٦

∴ -١٦ ≤ ٤ س ≤ ٢٤

∴ -٢٤ ≤ ٤ س - ٨ ≤ ١٦

∴ ٠ ≤ |٤ س - ٨| ≤ ٢٤

∴ أ = صفر ، ب = ٢٤

∴ أ + ب = ٢٤

(٧) ∵ س² - ٣|س| - ١٠ = ٠

∴ |س|² - ٣|س| - ١٠ = ٠

(|س| - ٥)(|س| + ٢) = ٠

∴ |س| = ٥ ومنها س = ±٥

أ، |س| = -٢ (مرفوض)

∴ جذري المعادلة هما ±٥

∴ حاصل ضرب جذري المعادلة يساوي -٢٥

(٨) ∵ ٣ < |س| < ٨ ∴ ٣ < س < ٨

∴ س = ٤ أ، ٥ أ، ٦ أ، ٧

أ، -٨ < س < -٣

∴ س = -٤ أ، -٥ أ، -٦ أ، -٧

∴ عدد قيم س الصحيحة هي ٨

(٩) ∵ (ر ∘ د)(س) = ٣

∴ ر(د(س)) = ٣

∴ ||٢ س - ٥| + ١| = ٣

∴ |٢ س - ٥| + ١ = ±٣

∴ |٢ س - ٥| = ±٣ - ١

∴ |٢ س - ٥| = -٤ (مرفوض)

أ، |٢ س - ٥| = ٢ ∴ ٢ س - ٥ = ±٢

∴ ٢ س = ٥ ± ٢

∴ ٢ س = ٧ ومنها س = $\frac{٧}{٢}$

أ، ٢ س = ٣ ومنها س = $\frac{٣}{٢}$

∴ مجموعة الحل = {$\frac{٧}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$}

٢٠

(١) (س + ١)(|س| - ١) + $\frac{١}{٢}$ = صفر

عندما س ≥ ٠

∴ (س + ١)(س - ١) + $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ س² - ١ + $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ س² - $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∈]٠ ، ∞[

أ، س = -$\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∉]٠ ، ∞[

، عندما س < ٠

∴ (س + ١)(-س - ١) + $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ -(س + ١)² + $\frac{١}{٢}$ = ٠

∴ (س + ١)² = $\frac{١}{٢}$ ∴ س + ١ = ±$\frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ س = (-١ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) ∈]-∞ ، ٠[

∴ س = (-١ - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) ∈]-∞ ، ٠[

∴ مجموعة الحل

= {$\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، -١ - $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، -١ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$}

(٢) ∵ ||٢ س + ٣| - ٨| = ٥

∴ |٢ س + ٣| - ٨ = ±٥

∴ |٢ س + ٣| = ٨ ± ٥

∴ |٢ س + ٣| = ١٣ أ، |٢ س + ٣| = ٣

∴ ٢ س + ٣ = ±١٣	٢ س + ٣ = ±٣
∴ ٢ س = -٣ ± ١٣	∴ ٢ س = -٣ ± ٣
∴ س = -٨ أ، ٥	∴ س = صفر أ، -٣

∴ مجموعة الحل = {-٨ ، ٥ ، صفر ، -٣}

(٣) |س|² - ٣|س| + ٢ = ٠

∴ (|س| - ٢)(|س| - ١) = ٠

∴ |س| = ٢ ومنها س = ±٢

أ، |س| = ١ ومنها س = ±١

∴ مجموعة الحل = {٢ ، -٢ ، ١ ، -١}

(٤) $\sqrt{(س - \frac{١}{س})^٢ + ٤}$ = ٢

∴ $\sqrt{س^٢ - ٢ + \frac{١}{س^٢} + ٤}$ = ٢

∴ $\sqrt{س^٢ + ٢ + \frac{١}{س^٢}} = ٢$

∴ $\sqrt{(س + \frac{١}{س})^٢} = ٢$ ∴ $|س + \frac{١}{س}| = ٢$

∴ $س + \frac{١}{س} = ±٢$ ∴ $س + \frac{١}{س} = ٢$

ومنها $س^٢ - ٢س + ١ = ٠$

∴ $(س - ١)^٢ = ٠$ ∴ س = ١

أ، $س + \frac{١}{س} = -٢$

ومنها $س^٢ + ٢س + ١ = ٠$

∴ $(س + ١)^٢ = ٠$ ∴ س = −١

∴ مجموعة الحل = {١ ، −١}

⑤ ∵ $|س^٢ - ٣| + \frac{٢}{|س^٢ - ٣|} = ٣$

∴ $|س^٢ - ٣|^٢ - ٣|س^٢ - ٣| + ٢ = ٠$

∴ $(|س^٢ - ٣| - ١)(|س^٢ - ٣| - ٢) = ٠$

∴ $|س^٢ - ٣| - ١ = ٠$ ، أ، $|س^٢ - ٣| - ٢ = ٠$

∴ $|س^٢ - ٣| = ١$	∴ $|س^٢ - ٣| = ٢$
∴ $س^٢ - ٣ = ±١$	∴ $س^٢ - ٣ = ±٢$
∴ $س^٢ = ٣ ± ١$	∴ $س^٢ = ٣ ± ٢$
∴ $س^٢ = ٤$	∴ $س^٢ = ٥$
ومنها س = ± ٢	ومنها س = $±\sqrt{٥}$
أ، $س^٢ = ٢$	أ، $س^٢ = ١$
ومنها س = $±\sqrt{٢}$	ومنها س = ± ١

∴ م.ح = {±٢ ، $±\sqrt{٢}$ ، $±\sqrt{٥}$ ، ±١}

⑥ |س − ٤| + |س − ٢| = ١٠

	②		④	
٤ − س		٤ − س		س − ٤
٢ − س		س − ٢		س − ٢
٦ − ٢س		٢		٢س − ٦

∴ عندما س > ٤ ∴ ٢س − ٦ = ١٠

∴ س = ٨ (يحقق)

• عندما س < ٢ ∴ ٦ − ٢س = ١٠

∴ س = −٢ (يحقق)

عندما ٢ < س < ٤ ∴ ٢ = ١٠ تعارض

∴ مجموعة الحل = {٨ ، −٢}

⑦ ∵ (|٢س − ٣| − ٥)(|٢س − ٣| + ٥) > ١١

∴ $|٢س - ٣|^٢ - ٢٥ > ١١$

∴ $|٢س - ٣|^٢ > ٣٦$

∴ |٢س − ٣| > ٦

∴ ٢س − ٣ > ٦ ومنها س > $\frac{٩}{٢}$

أ، ٢س − ٣ < −٦ ومنها س < $-\frac{٣}{٢}$

∴ م.ح = ح −]$-\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٩}{٢}$[

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الأولى

تطبيقات على الدرس الأول

١

① ع (١٠) = ٨ × ١٠ = ٨٠ سم/ث

② ع (١٥٠) = ٨٠ سم/ث

③ ع (٢١٠) = −٤ × ٢١٠ + ٨٨٠ = ٤٠ سم/ث

٢

ع (ل) = ٤ ل

① ع (٣) = ٤ × ٣ = ١٢ وحدة طول.

② ع ($\frac{١٥}{٤}$) = ٤ × $\frac{١٥}{٤}$ = ١٥ وحدة طول.

٣

م (نق) = π $نق^٢$

① م ($\frac{١}{٢}$) = $\frac{١}{٤}$ π وحدة مربعة.

② م (٥) = ٢٥ π وحدة مربعة.

تطبيق على الدرس الثالث

① د (س) = ٠,٣ س + ٨ × ٧

② نعم دالة أحادية لأنه بفرض أ ، ب ∈ مجال الدالة د

• ∵ د (أ) = ٠,٣ أ + ٨ × ٧

• د (ب) = ٠,٣ ب + ٨ × ٧

وبفرض أن د (أ) = د (ب)

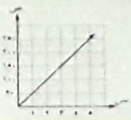
∴ ٠,٣ أ + ٨ × ٧ = ٠,٣ ب + ٨ × ٧

∴ ٠,٣ أ = ٠,٣ ب ∴ أ = ب

تطبيقات على الدرس الخامس

١

د (س) = ٥٠ س



٢

• ∵ ف = ع × ن

• ∵ ن = ٣ دقائق ، ع = ٣٠ مترًا/دقيقة

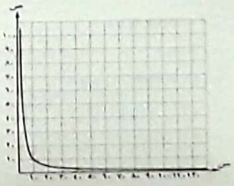
∴ ف = ٣ × ٣٠ = ٩٠ ∴ ع = $\frac{٩٠}{ن}$

∴ ع ∝ $\frac{١}{ن}$

∴ ع تتغير عكسيًا بتغير الزمن.

• ع = $\frac{٩٠}{ن}$ • عندما ع = ٤٥ مترًا/دقيقة.

∴ ٤٥ = $\frac{٩٠}{ن}$ ∴ ن = $\frac{٩٠}{٤٥}$ = ٢ دقيقة.



٣

① ∵ النقطة (٠ ، ٣) تنتمي لمنحنى الدالة

∴ (٠ ، ٣) تحقق معادلة الدالة.

د (س) = أ $(س - ٢)^٢$ + ٤

∴ ٣ = أ $(٠ - ٢)^٢$ + ٤ ∴ ٣ = ٤أ + ٤

∴ ٤أ = −١ ∴ أ = $-\frac{١}{٤}$

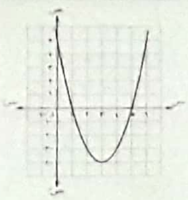
② ∵ نقطة رأس المنحنى هي (٢ ، ٤)

∴ أقصى ارتفاع للبوابة = ٤ أمتار.

③ عرض البوابة = ٢ + ٢ = ٤ أمتار.

٤

①



من الرسم

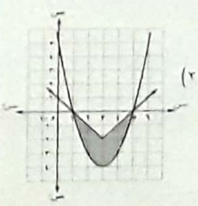
ل = ٤ وحدة طول.

• ع = ٤ وحدة طول.

∴ المساحة المطلوبة

= $\frac{٢}{٣}$ ل ع = $\frac{٢}{٣}$ × ٤ × ٤ = $\frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

②



المساحة المطلوبة

= $\frac{٣٢}{٣}$ − ($\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٢)

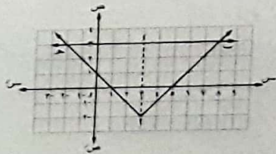
= $\frac{٣٢}{٣}$ − ٤

= $\frac{٢٠}{٣}$ وحدة مربعة.

تطبيقات على الدرس السادس

١

د (س) = | س − ٣ | − ٢ ، ر (س) = ٣



∵ طول الوحدة = ٨ أمتار.

، ∵ ب حـ = ١٠ وحدات.

∴ طول القاعدة = ١٠ × ٨ = ٨٠ متر.

، ∵ أ ء = ٥ وحدات.

∴ الارتفاع = ٥ × ٨ = ٤٠ متر.

∴ مساحة الأرض = مساحة Δ أ ب حـ

$= \frac{١}{٢} \times ٨٠ \times ٤٠ = ١٦٠٠$ متر مربع.

٢

يتقاطع الطريقان عندما د (س) = ر (س)

∴ | س − ٥ | = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س

عندما س ≥ ٥ : س − ٥ = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س

∴ $١\frac{٢}{٣}$ س = ١٠ ∴ س = ٦ ∈ [٥ ، ∞[

، عندما س < ٥ : ∴ − س + ٥ = ٥ − $\frac{٢}{٣}$ س

∴ $\frac{١}{٣}$ س = ٠ ∴ س = ٠ ∈]− ∞ ، ٥[

، ∵ د (٦) = | ٦ − ٥ | = ١

∴ أ (٦ ، ١) نقطة تقاطع المنحنيين.

، د (٠) = | ٠ − ٥ | = ٥

∴ ب (٠ ، ٥) نقطة تقاطع المنحنيين.

∴ أ ب = $\sqrt{(٦ - ٠)^٢ + (١ - ٥)^٢} = ٢\sqrt{١٣}$

، ∵ وحدة الأطوال تمثل ٥ كيلو مترات

∴ أ ب = ٥ × $٢\sqrt{١٣}$ = $١٠\sqrt{١٣}$ ≃ ٣٦ كم

٣

بفرض أن طول المتقدم لشغل الوظيفة = س سم

∴ ١٧٨ ≤ س ≤ ١٩٢ وبإضافة (− ١٨٥)

إلى أطراف المتباينة. ∴ −٧ ≤ س − ١٨٥ ≤ ٧

∴ | س − ١٨٥ | ≤ ٧

٤

① بعد ثانيتين : ف = ٨ | ٥ − ٢ | = ٢٤ سم.

[فى اتجاه الحركة من أ إلى ب]

، بعد ٨ ثوان : ف = ٨ | ٥ − ٨ | = ٢٤ سم.

[فى اتجاه الحركة من ب إلى حـ]

② ∵ ٨ | ٥ − ن | = ١٦

∴ | ن − ٥ | = ٢

∴ ن − ٥ = −٢ ومنها ن = ٣

[فى اتجاه الحركة من أ إلى ب]

أ، ن − ٥ = ٢ ومنها ن = ٧

[فى اتجاه الحركة من ب إلى حـ]

③ ∵ ٨ | ن − ٥ | < ٨ ∴ | ن − ٥ | < ١

∴ −١ < ن − ٥ < ١ ∴ ٤ < ن < ٦

∴ ن ∈]٤ ، ٦[

٥

∵ ب = (٨ ، ٤)

، ∵ د (٨) = $\frac{٤}{٣}$ | ٨ − ٥ | = ٤

∴ ب تقع على منحنى الدالة د

∴ الكرة السوداء سوف تسقط فى الجيب ب

إجابات الوحدة الثانية

إجابات تمارين 7

١

① (ب)	② (ب)	③ (ب)	④ (جـ)
⑤ (أ)	⑥ (جـ)	⑦ (د)	⑧ (ب)
⑨ (جـ)	⑩ (جـ)	⑪ (جـ)	⑫ (جـ)
⑬ (أ)	⑭ (د)	⑮ (ب)	

٢

① $\frac{(٢٧)^{-٢} \times (١٢)^{٢}}{١٦ \times (٨١)^{-٢}} = \frac{(٣^٣)^{-٢} \times (٣)^٢ \times (٢^٢)^٢}{٢^٤ \times (٣^٤)^{-٢}}$

$= \frac{٣^{-٦} \times ٣^٢ \times ٢^٤}{٢^٤ \times ٣^{-٨}} = ٣^{-٦+٢+٨} = ٣$

② $\frac{٤^{٢ن+١} \times ٢^{١-ن}}{٨^{ن+٢}} = \frac{(٢^٢)^{٢ن+١} \times ٢^{١-ن}}{(٢^٣)^{ن+٢}}$

$= \frac{٢^{٤ن+٢} \times ٢^{١-ن}}{٢^{٣ن+٦}}$

$= ٢^{٤ن+٢+١-ن-٣ن-٦}$

$= ٢^{-٣} = \frac{١}{٢^٣} = \frac{١}{٨}$

③ $\frac{٩^{٤ن+١} \times ٤^{٢-٢ن}}{٣^{٩ن+١} \times ٤٨^{١-ن}}$

$= \frac{(٣^٢)^{٤ن+١} \times (٢^٢)^{٢-٢ن}}{٣^{٩ن+١} \times ٣^{١-ن} \times (٢^٤)^{١-ن}}$

$= \frac{٣^{٨ن+٢} \times ٢^{٤-٤ن}}{٣^{٩ن+١} \times ٣^{١-ن} \times ٢^{٤-٤ن}}$

$= ٣^{٨ن+٢-٩ن-١-١+ن} \times ٢^{٤-٤ن-٤+٤ن}$

$= ٣^٠ \times ٢^٠ = ١ \times ١ = ١$

④ $\frac{١٢٥ \times (١٥)^{ن-٣} \times (٢٥)^{م+ن}}{(٧٥)^{ن} \times (٥)^{ن+٢م}}$

$= \frac{٥^٣ \times ٥^{ن-٣} \times ٣^{ن-٣} \times (٥^٢)^{م+ن}}{٣^{ن} \times (٥^٢)^{ن} \times ٥^{ن+٢م}}$

$= \frac{٥^٣ \times ٥^{ن-٣} \times ٣^{ن-٣} \times ٥^{٢م+٢ن}}{٣^{ن} \times ٥^{٢ن} \times ٥^{ن+٢م}}$

$= ٥^{٣+ن-٣+٢م+٢ن-٢ن-ن-٢م} \times ٣^{ن-٣-ن}$

$= ٥^٠ \times ٣^{-٣} = \frac{١}{٢٧}$

⑤ $(١٨)^{\frac{١}{٢}} \times (١٢)^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{١}{(٢٤)^{\frac{١}{٢}}}$

$= ٢^{\frac{١}{٢}} \times (٣^٢)^{\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{٣}{٢}} \times (٢^٢)^{\frac{٣}{٢}} \times \frac{١}{(٢^٣)^{\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{١}{٢}}}$

$= ٢^{\frac{١}{٢}} \times ٣ \times ٣^{\frac{٣}{٢}} \times ٢^٣ \times ٢^{-\frac{٣}{٢}} \times ٣^{-\frac{١}{٢}}$

$= ٢^{\frac{١}{٢}+٣-\frac{٣}{٢}} \times ٣^{١+\frac{٣}{٢}-\frac{١}{٢}}$

$= ٢^٢ \times ٣^٢ = ٣٦$

⑥ المقدار = $\frac{٢^{\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{١}{٣}} \times (٧^٢)^{\frac{١}{٤}}}{(٣^٢)^{\frac{١}{٦}} \times ٧^{\frac{١}{٢}}} = \frac{٢^{\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{١}{٣}} \times ٧^{\frac{١}{٢}}}{٢^{\frac{١}{٢}} \times ٣^{\frac{١}{٣}} \times ٧^{\frac{١}{٢}}}$

$= ٣^{\frac{١}{٣}-\frac{١}{٣}} \times ٧^{\frac{١}{٢}-\frac{١}{٢}}$

$= ٣^٠ \times ٧^٠ = ١ \times ١ = ١$

٣

① الطرف الأيمن

$= \frac{(٣^٢)^{ص-\frac{١}{٢}} \times ٧^{\frac{ص(ص+٢)}{ص}}}{(٣^٤)^{ص-١} \times ٣^{٥-ص} \times ٧^{٥-ص} \times (٧^٢)^{ص-١}}$

$= \frac{٣^{٢ص-١} \times ٧^{ص+٢}}{٣^{٤ص-٤} \times ٣^{٥-ص} \times ٧^{٥-ص} \times ٧^{٢ص-٢}}$

$= ٣^{٢ص-١-٤ص+٤-٥+ص}$

$\times ٧^{ص+٢-٥+ص-٢ص+٢}$

$= ٣^{-٢} \times ٧^{\text{صفر}} = ٣^{-٢} = \frac{١}{٩}$

② الطرف الأيمن = $\frac{(٧^٢)^{٣س-\frac{١}{٢}} \times (٢^٣)^{٢س+١}}{(٢^٣)^{٢س} \times (٧^٢)^{٣س} \times ٢^٢}$

$= \frac{٧^{٦س-١} \times ٢^{٦س+٢}}{٢^{٦س} \times ٧^{٦س} \times ٢^٢}$

$= ٢^{٦س+٢-٦س-٢}$

$\times ٧^{٦س-١-٦س}$

$= ٢^{\text{صفر}} \times ٧^{-١} = \frac{١}{٧}$

③ الطرف الأيمن

$= \frac{٥^٢ \times (٢^٢)^{\frac{٣}{٤}} \times ٢^{-\frac{١}{٤}} \times ٥^{-\frac{١}{٤}}}{(٢^٢)^{\frac{٤}{٤}} \times ٢^{-\frac{٢}{٤}} \times ٣^{-\frac{٢}{٤}} \times ٣^{\frac{٢}{٤}} \times ٥^{\frac{٢}{٤}}}$

$= \frac{٥^٢ \times ٢^{\frac{٣}{٢}} \times ٢^{-\frac{١}{٤}} \times ٥^{-\frac{١}{٤}}}{٢^{\frac{٤}{٤}} \times ٢^{-\frac{٢}{٤}} \times ٣^{-\frac{٢}{٤}} \times ٣^{\frac{٢}{٤}} \times ٥^{\frac{٢}{٤}}}$

$= ٥^{٢-\frac{١}{٤}-\frac{٢}{٤}} \times ٢^{\frac{٦}{٤}-\frac{١}{٤}-\frac{٤}{٤}+\frac{٢}{٤}} \times ٣^{\frac{٢}{٤}-\frac{٢}{٤}}$

$= ٥^٢ \times ٢^٠ \times ٣^٠ = ٢٥ \times ١ \times ١ = ٢٥$

④ الطرف الأيمن

$= \frac{٣ \times ٢^{س+١٠} + ٢^{س+١٠}}{٢^{س+١٢} - ٢ \times ٢ \times ٢^{س+١٠}}$

$= \frac{٢^{س+١٠}(٣+١)}{٢^{س+١٠}(٢^{٢}-٢)} = \frac{٢^{س+١٠} \times ٢^{٢}}{٢^{س+١٠} \times ١} = ٢^{٣} = ٨$

٤

① ∵ $س^{\frac{٣}{٢}} = ٢^{٣}$ ∴ $س = (٢^{٣})^{\frac{٢}{٣}} = ٤$

∴ م.ح = {٤}

② $س^{\frac{٥}{٢}} = \frac{١}{٢^{٥}} = ٢^{-٥}$ ∴ $س = (٢^{-٥})^{\frac{٢}{٥}}$

∴ $س = ٢^{-٢}$ ∴ م.ح = $\{\frac{١}{٤}\}$

③ ∵ $س^{-\frac{٢}{٣}} = ٢^{\frac{٢}{٣}}$ ∴ $س = (٢^{\frac{٢}{٣}})^{-\frac{٣}{٢}}$

∴ $س = ٢^{-١} = \frac{١}{٢}$ ∴ م.ح = $\{\frac{١}{٢}\}$

④ $س^{\frac{٤}{٣}} = ٣^{٤}$

∴ $س = \pm(٣^{٤})^{\frac{٣}{٤}} = \pm ٣^{٣} = \pm ٢٧$

∴ مجموعة الحل = {٢٧ ، −٢٧}

⑤ $(س - ١)^{\frac{٥}{٣}} = ٢^{٥}$

∴ $س - ١ = (٢^{٥})^{\frac{٣}{٥}} = ٢^{٣} = ٨$

∴ س = ٩ ∴ م.ح = {٩}

⑥ $٢س + ٣ = \pm(٣^{٤})^{\frac{٣}{٤}}$ ∴ ٢س + ٣ = ±٢٧

∴ ٢س = ٢٤ أ، ٢س = −٣٠

∴ س = ١٢ أ، س = −١٥

∴ م.ح = {١٢ ، −١٥}

⑦ $س + ١ = (٣٢^{-\frac{١}{٢}})^{-\frac{٢}{٥}} = ٣٢^{\frac{١}{٥}} = (٢^{٥})^{\frac{١}{٥}}$

∴ س + ١ = ٢ ∴ س = ١

∴ م.ح = {١}

⑧ $س^{٢} - ٥س + ٩ = (٣^{٥})^{\frac{٢}{٥}}$

∴ $س^{٢} - ٥س + ٩ = ٩$

∴ $س^{٢} - ٥س = ٠$ ∴ س(س − ٥) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = ٥ ∴ م.ح = {٠ ، ٥}

⑨ ∵ $\sqrt{س} + ٢ = ٩$ ∴ $\sqrt{س} = ٧$

∴ س = ٤٩ ∴ م.ح = {٤٩}

⑩ $(س^{\frac{٢}{٥}} - ١)(س^{\frac{٢}{٥}} - ٤) = ٠$

∴ $س^{\frac{٢}{٥}} = ١$ ومنها س = ±١

أ، $س^{\frac{٢}{٥}} = ٤$ ومنها $س = \pm(٢^{٢})^{\frac{٥}{٢}} = \pm ٣٢$

∴ م.ح = {١ ، −١ ، ٣٢ ، −٣٢}

⑪ $(س^{\frac{٢}{٣}} - ١)(س^{\frac{٢}{٣}} - ٩) = ٠$

∴ $س^{\frac{٢}{٣}} = ١$ ∴ س = ±١

أ، $س^{\frac{٢}{٣}} = ٩$ ∴ $س = \pm(٣^{٢})^{\frac{٣}{٢}} = \pm ٢٧$

∴ م.ح = {١ ، −١ ، ٢٧ ، −٢٧}

⑫ $(س^{\frac{١}{٢}} - ١)(س^{\frac{١}{٢}} - ٢) = ٠$

∴ $س^{\frac{١}{٢}} = ١$ ∴ س = ١

أ، $س^{\frac{١}{٢}} = ٢$ ∴ $س = (٢)^{٢} = ٤$

∴ م.ح = {١ ، ٤}

⑬ $س - ٨\sqrt{س} + ١٥ = ٠$

∴ $(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} - ٥) = ٠$

∴ $\sqrt{س} = ٣$ ومنها س = ٩

أ، $\sqrt{س} = ٥$ ومنها س = ٢٥

∴ م.ح = {٩ ، ٢٥}

⑭ ∵ $س^{\frac{٢}{٣}} - ٢٥ س^{\frac{١}{٣}} - ٥٤ = ٠$

∴ $(س^{\frac{١}{٣}} - ٢٧)(س^{\frac{١}{٣}} + ٢) = ٠$

∴ $س^{\frac{١}{٣}} = ٢٧$

∴ $س = (٣^{٣})^{٣} = ٣^{٩} = ١٩٦٨٣$

أ، $س^{\frac{١}{٣}} = -٢$ ∴ $س = (-٢)^{٣} = -٨$

∴ م.ح = {١٩٦٨٣ ، −٨}

⑮ $س^{\frac{٢}{٣}} - س^{\frac{١}{٣}} - ٦ = ٠$

∴ $(س^{\frac{١}{٣}} - ٣)(س^{\frac{١}{٣}} + ٢) = ٠$

∴ $س^{\frac{١}{٣}} = ٣$ ∴ $س = ٣^{٣} = ٢٧$

أ، $س^{\frac{١}{٣}} = -٢$ (مرفوض)

∴ م.ح = {٢٧}

⑯ $س^{\frac{٢}{٥}} - ٣ س^{\frac{١}{٥}} - ٤ = ٠$

∴ $(س^{\frac{١}{٥}} + ١)(س^{\frac{١}{٥}} - ٤) = ٠$

∴ $س^{\frac{١}{٥}} = -١$ (مرفوض)

أ، $س^{\frac{١}{٥}} = ٤$

∴ $س = \pm(٢^{٢})^{\frac{٥}{٢}} = \pm ٢^{٥} = \pm ٣٢$

∴ م.ح = {−٣٢ ، ٣٢}

⑰ بالضرب × $\sqrt[٤]{س}$

∴ $(\sqrt[٤]{س})^{٢} - ٣\sqrt[٤]{س} + ٢ = ٠$

∴ $س^{\frac{١}{٢}} - ٣ س^{\frac{١}{٤}} + ٢ = ٠$

∴ $(س^{\frac{١}{٤}} - ١)(س^{\frac{١}{٤}} - ٢) = ٠$

∴ $س^{\frac{١}{٤}} = ١$ ومنها س = ١

أ، $س^{\frac{١}{٤}} = ٢$ ومنها س = ٣٢

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٣٢}

٥

① $٥^{٢س-١} = \frac{١}{١٢٥}$ ∴ $٥^{٢س-١} = \frac{١}{٥^{٣}}$

∴ $٥^{٢س-١} = ٥^{-٣}$ ∴ ٢س − ١ = −٣

∴ ٢س = −٢ ∴ س = −١

∴ م.ح = {−١}

② $٥^{س+٢} = س^{س+٢}$ ∴ إما س = ٥

أ، س + ٢ = ٠ ∴ س = −٢

∴ م.ح = {−٢ ، ٥}

③ $٢^{س^{٢}-٩} = ١$ ∴ $س^{٢} - ٩ = ٠$

∴ $س^{٢} = ٩$ ∴ س = ±٣

∴ م.ح = {٣ ، −٣}

④ $س^{س^{٢}-٢٥} = ٢^{س^{٢}-٢٥}$

∴ إما س = ±٢ أ، $س^{٢} - ٢٥ = ٠$

∴ $س^{٢} = ٢٥$ ∴ س = ±٥

∴ م.ح = {٢ ، −٢ ، ٥ ، −٥}

⑤ $(٣\sqrt{٣})^{|س|} = ٢٧$

∴ $(٣\sqrt{٣})^{|س|} = (٣\sqrt{٣})^{٢}$

∴ |س| = ٢ ∴ س = ±٢

∴ م.ح = {٢ ، −٢}

⑥ ∵ $٣^{|٣س-٤|} = ٣^{٤س-٤}$

∴ |٣س − ٤| = ٤س − ٤

عند $س \geq \frac{٤}{٣}$

∴ ٣س − ٤ = ٤س − ٤

∴ س = ٠ (لا يحقق) ، عند $س < \frac{٤}{٣}$

∴ −٣س + ٤ = ٤س − ٤

∴ ٧س = ٨ ∴ $س = \frac{٨}{٧}$ (يحقق)

∴ م.ح = $\{\frac{٨}{٧}\}$

⑦ $٢ \times ٤^{س+٣} = \frac{١}{٣٢}$ ∴ $٤^{س+٣} = \frac{١}{٦٤}$

∴ $٤^{س+٣} = ٤^{-٣}$ ∴ س + ٣ = −٣

∴ س = −٦ ∴ م.ح = {−٦}

⑧ $(\frac{٣}{٥})^{٢س-١} = \frac{٢٧}{١٢٥}$

∴ $(\frac{٣}{٥})^{٢س-١} = (\frac{٣}{٥})^{٣}$

∴ ٢س − ١ = ٣ ∴ ٢س = ٤

∴ س = ٢ ∴ م.ح = {٢}

⑨ $٥^{س-١} \times ٧^{-(س-١)} = \frac{٢٥}{٤٩}$

∴ $٥^{س-١} \times ٧^{-(س-١)} = (\frac{٥}{٧})^{٢}$

∴ $(\frac{٥}{٧})^{س-١} = (\frac{٥}{٧})^{٢}$

∴ س − ١ = ٢　　∴ س = ٣

∴ م.ح = {٣}

⑩ ∵ $\frac{٩^{س+١} \times ٤^{س-١}}{٦^{٢س}} = \frac{٣^{٢س+٢} \times ٢^{٢س-٢}}{٣^{٢س} \times ٢^{٢س}}$

= $٣^{٢س+٢-٢س} \times ٢^{٢س-٢-٢س}$

= $٣^{٢} \times ٢^{-٢} = (\frac{٣}{٢})^{٢}$

∴ $(\frac{٣}{٢})^{٢} = (\frac{٣}{٢})^{س}$　　∴ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

⑪ $\frac{١٢^{س-٢} \times ٩^{س+١}}{١٨^{س} \times ٤^{س-١}} = ٩$

∴ $\frac{(٣ \times ٢^{٢})^{س-٢} \times (٣^{٢})^{س+١}}{(٢ \times ٣^{٢})^{س} \times (٢^{٢})^{س-١}} = ٩$

∴ $\frac{٣^{س-٢} \times ٢^{٢س-٤} \times ٣^{٢س+٢}}{٢^{س} \times ٣^{٢س} \times ٢^{٢س-٢}} = ٩$

∴ $٣^{س-٢+٢س+٢-٢س}$

$\times ٢^{٢س-٤-س-٢س+٢} = ٩$

∴ $٣^{س} \times ٢^{٠} = ٣^{٢}$　　∴ $٣^{س} = ٣^{٢}$

∴ س = ٢　　∴ م.ح = {٢}

⑫ $\frac{١}{٢٧} (\sqrt{٣})^{س+٢} = ١$

∴ $\frac{١}{(\sqrt{٣})^{٦}} \times (\sqrt{٣})^{س+٢} = ١$

∴ $(\sqrt{٣})^{س+٢} = (\sqrt{٣})^{٦}$

∴ س + ٢ = ٦　　∴ س = ٤

∴ م.ح = {٤}

⑬ $(\sqrt{٣})^{س^{٢}-٥س} = ١$　∴ س² − ٥س = ٠

∴ س(س − ٥) = ٠　∴ س = ٠ أو س = ٥

∴ م.ح = {٠ ، ٥}

⑭ ∵ $٥^{س^{٢}-٥س} = \frac{١٦}{١٠٠٠٠} = \frac{١}{٦٢٥}$

∴ $٥^{س^{٢}-٥س} = ٥^{-٤}$　∴ س² − ٥س = −٤

∴ س² − ٥س + ٤ = ٠

∴ (س − ١)(س − ٤) = ٠

∴ س = ١ أو س = ٤　∴ م.ح = {١ ، ٤}

⑮ $٥^{س^{٢}} = ٢٥^{س+٤}$　　∴ $٥^{س^{٢}} = ٥^{٢س+٨}$

∴ س² = ٢س + ٨　∴ س² − ٢س − ٨ = ٠

∴ (س + ٢)(س − ٤) = ٠

∴ س = −٢ أو س = ٤　∴ م.ح = {−٢ ، ٤}

⑯ $٢^{س^{٢}-٤٢} = (\frac{١}{٢})^{س}$　∴ $٢^{س^{٢}-٤٢} = ٢^{-س}$

∴ س² − ٤٢ = −س

∴ س² + س − ٤٢ = ٠

∴ (س − ٦)(س + ٧) = ٠

∴ س − ٦ = ٠ ومنها س = ٦

أو س + ٧ = ٠ ومنها س = −٧

∴ م.ح = {٦ ، −٧}

⑰ $(\sqrt{٧})^{|س+٢|} = ٤٩$

∴ $(\sqrt{٧})^{|س+٢|} = (\sqrt{٧})^{٤}$

∴ |س + ٢| = ٤　　∴ س + ٢ = ±٤

∴ إما س + ٢ = ٤　ومنها س = ٢

أو س + ٢ = −٤　ومنها س = −٦

∴ م.ح = {٢ ، −٦}

⑱ $٣^{٢س-٣} \times ٧^{٦-٤س} = ١$

∴ $٣^{٢س-٣} \times ٧^{-٢(٢س-٣)} = ١$

∴ $٣^{٢س-٣} \times \frac{١}{(٧^{٢})^{٢س-٣}} = ١$

∴ $٣^{٢س-٣} = (٤٩)^{٢س-٣}$

∴ ٢س − ٣ = ٠　　∴ س = $\frac{٣}{٢}$

∴ م.ح = {$\frac{٣}{٢}$}

⑲ $\sqrt{٩^{س} - ٢ \times ٣^{س+١} + ٩} = ٢٤$

∴ $\sqrt{٣^{٢س} - ٢ \times ٣ \times ٣^{س} + ٩} = ٢٤$

∴ $\sqrt{(٣^{س} - ٣)^{٢}} = ٢٤$　∴ $|٣^{س} - ٣| = ٢٤$

∴ $٣^{س} = ٢٧$　　∴ $٣^{س} = ٣^{٣}$

∴ س = ٣　أو $٣^{س} - ٣ = -٢٤$

∴ $٣^{س} = -٢١$ (مرفوض)

∴ م.ح = {٣}

⑳ $\sqrt{٥^{٢س-٢} - \frac{٢}{٥} \times ٥^{س} + ١} = ١٢٤$

∴ $\sqrt{٥^{٢(س-١)} - ٢ \times ٥^{س-١} + ١} = ١٢٤$

∴ $\sqrt{(٥^{س-١} - ١)^{٢}} = ١٢٤$

∴ $|٥^{س-١} - ١| = ١٢٤$

∴ $٥^{س-١} - ١ = ١٢٤$

∴ $٥^{س-١} = ١٢٥ = ٥^{٣}$

∴ س − ١ = ٣　　∴ س = ٤

أو $٥^{س-١} = -١٢٤$

∴ $٥^{س-١} = -١٢٣$ (مرفوض)

∴ م.ح = {٤}

٦

① $٥^{س+١} + ٥^{س-١} = ٢٦$

∴ $٥^{س}(٥ + ٥^{-١}) = ٢٦$

∴ $٥^{س} \times \frac{٢٦}{٥} = ٢٦$

∴ $٥^{س} = ٥$　　∴ س = ١

∴ مجموعة الحل = {١}

② $٣^{س+٣} - ٣^{س+٢} = ١٦٢$

∴ $٣^{س}(٣^{٣} - ٣^{٢}) = ١٦٢$

∴ $٣^{س} \times ١٨ = ١٦٢$

∴ $٣^{س} = ٩$　　∴ $٣^{س} = ٣^{٢}$

∴ س = ٢　　∴ م.ح = {٢}

③ $٧^{٢-س} + ٧^{-س} = ٥٠$

∴ $٧^{-س}(٧^{٢} + ١) = ٥٠$

∴ $٧^{-س} \times ٥٠ = ٥٠$　　∴ $٧^{-س} = ١$

∴ س = ٠　　∴ م.ح = {٠}

④ $٥^{٢س} + ٢٥ = ٢٦ \times ٥^{س}$

∴ $٥^{٢س} - ٢٦ \times ٥^{س} + ٢٥ = ٠$

∴ $(٥^{س} - ٢٥)(٥^{س} - ١) = ٠$

∴ $٥^{س} = ٢٥$ ومنها س = ٢

، $٥^{س} = ١$ ومنها س = ٠

∴ م.ح = {٢ ، ٠}

⑤ $٢^{س} + ٢^{٥-س} = ١٢$

∴ $٢^{س} + \frac{٣٢}{٢^{س}} = ١٢$ بالضرب × $٢^{س}$

∴ $٢^{٢س} + ٣٢ = ١٢ \times ٢^{س}$

∴ $٢^{٢س} - ١٢ \times ٢^{س} + ٣٢ = ٠$

∴ $(٢^{س} - ٤)(٢^{س} - ٨) = ٠$

∴ $٢^{س} = ٤$ ومنها س = ٢

أو $٢^{س} = ٨$ ومنها س = ٣

∴ م.ح = {٢ ، ٣}

⑥ $(\frac{١}{٢})^{س+١} + (\frac{١}{٢})^{س+٣} + (\frac{١}{٢})^{س+٥} = ٨٤$

∴ $(\frac{١}{٢})^{س}(\frac{١}{٢} + (\frac{١}{٢})^{٣} + (\frac{١}{٢})^{٥}) = ٨٤$

∴ $(\frac{١}{٢})^{س} \times \frac{٢١}{٣٢} = ٨٤$　∴ $(\frac{١}{٢})^{س} = ٨٤ \times \frac{٣٢}{٢١}$

∴ $(\frac{١}{٢})^{س} = ١٢٨$　　∴ $(\frac{١}{٢})^{س} = (\frac{١}{٢})^{-٧}$

∴ س = −٧　　∴ م.ح = {−٧}

⑦ $٤^{س} + ٢^{س+١} = ٨$

∴ $٢^{٢س} + ٢(٢)^{س} - ٨ = ٠$

∴ $(٢^{س} + ٤)(٢^{س} - ٢) = ٠$

∴ إما $٢^{س} = -٤$ (مرفوض) أو $٢^{س} = ٢$

∴ س = ١　　∴ مجموعة الحل = {١}

⑧ $٢^{٢س+١}$ − ٣٢ $(٢)^{س}$ + ١٦ = ٠

∴ ٢ $(٢)^{٢س}$ − ٣٢ $(٢)^{س}$ + ١٦ = ٠

∴ [٢ $(٢)^{س}$ − ١] [$٢^{س}$ − ١٦] = ٠

∴ إما ٢ $(٢)^{س}$ = ١   ∴ $٢^{س+١}$ = ١

∴ س + ١ = ٠   ∴ س = −١

أو $٢^{س}$ = ١٦   ∴ $٢^{س}$ = $٢^{٤}$ ∴ س = ٤

∴ مجموعة الحل = {−١ ، ٤}

⑨ $٥^{٢س−٢}$ − ٦ $(٥)^{س−١}$ + ٥ = ٠

∴ $٥^{٢(س−١)}$ − ٦ $(٥)^{س−١}$ + ٥ = ٠

∴ ($٥^{س−١}$ − ١) ($٥^{س−١}$ − ٥) = ٠

∴ إما $٥^{س−١}$ = ١   ومنها س − ١ = ٠

∴ س = ١ أو $٥^{س−١}$ = ٥

∴ س − ١ = ١   ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٢}

⑩ $٩^{س^{٢}−١}$ − ٣٦ $(٣)^{س^{٢}−٢}$ + ٣ = ٠

∴ $(٣)^{٢(س^{٢}−١)}$ − $\frac{٣٦}{٩}$ $(٣)^{س^{٢}−١}$ + ٣ = ٠

∴ $(٣)^{٢(س^{٢}−١)}$ − ٤ $(٣)^{س^{٢}−١}$ + ٣ = ٠

∴ ($٣^{س^{٢}−١}$ − ١) ($٣^{س^{٢}−١}$ − ٣) = ٠

∴ إما $٣^{س^{٢}−١}$ = ١

∴ $س^{٢}$ − ١ = ٠   ∴ $س^{٢}$ = ١

∴ س = ± ١ أو $٣^{س^{٢}−١}$ = ٣

∴ $س^{٢}$ − ١ = ١   ∴ $س^{٢}$ = ٢

∴ س = ± $\sqrt{٢}$

∴ مجموعة الحل = {١ ، −١ ، $\sqrt{٢}$ ، −$\sqrt{٢}$}

⑪ $١٠^{س}$ − $٥^{س−١}$ × $٢^{س−٢}$ = ٩٥٠

∴ $١٠^{س}$ − $\frac{٥^{س}}{٥}$ × $\frac{٢^{س}}{٤}$ = ٩٥٠

∴ $١٠^{س}$ − $\frac{١}{٢٠}$ $(١٠)^{س}$ = ٩٥٠

وبالضرب × ٢٠

∴ ٢٠ $(١٠)^{س}$ − $(١٠)^{س}$ = ٢٠ × ٩٥٠

∴ ١٩ $(١٠)^{س}$ = ٢٠ × ٩٥٠

∴ $١٠^{س}$ = ١٠٠٠   ∴ $١٠^{س}$ = $١٠^{٣}$

∴ س = ٣   ∴ مجموعة الحل = {٣}

٧

① (أ)   ② (ب)   ③ (ب)   ④ (جـ)

⑤ (د)   ⑥ (أ)   ⑦ (جـ)   ⑧ (د)

⑨ (أ)

٨

① ص $^{\frac{٣}{٤}}$ = $٢^{٦}$ ∴ ص = $(٢^{٦})^{\frac{٤}{٣}}$ = $٢^{٨}$ = ٢٥٦

، ٢ س $^{\frac{٢}{٣}}$ = ٢ × $٢^{٢}$

∴ س = $(٢^{٢})^{\frac{٣}{٢}}$ = $٢^{٣}$ = ٨

∴ ٥ س + ٢ ص = ٥ × ٨ + ٢ × ٢٥٦

= ٤٠ + ٥١٢ = ٥٥٢

② س $^{\frac{٣}{٢}}$ = ٢٧   ∴ س = $(٣^{٣})^{\frac{٢}{٣}}$ = $٣^{٢}$ = ٩

، ٣ ص $^{\frac{٢}{٣}}$ = ٢٧   ∴ ص $^{\frac{٢}{٣}}$ = ٩

∴ ص = ± $(٣^{٢})^{\frac{٣}{٢}}$ = ± ٢٧

∴ س + ص = ٩ + ٢٧ = ٣٦

أو س + ص = ٩ − ٢٧ = −١٨

③ ∵ س $^{\frac{٤}{٣}}$ = $٣^{٤}$

∴ س = ± $(٣^{٤})^{\frac{٣}{٤}}$ = ± ٢٧

، ∵ ٩ ص $^{\frac{-٢}{٣}}$ = ٨١   ∴ ص $^{\frac{-٢}{٣}}$ = ٩ = $٣^{٢}$

∴ ص $^{\frac{٢}{٣}}$ = $٣^{-٢}$

∴ ص = ± $(٣^{-٢})^{\frac{٣}{٢}}$ = ± $(٣)^{-٣}$ = ± $\frac{١}{٢٧}$

∴ | ٢ س ص | = | ٢ × (± ٢٧) × (± $\frac{١}{٢٧}$) | = ٢

٩

① خطأ لأن $(-٩)^{\frac{٢}{٢}}$ ≠ $\sqrt{(-٩)^{٢}}$ لوجود عامل مشترك بين البسط والمقام للأس.

② خطأ لأن س = ± ٣ لأن الأس زوجي.

١٠

① ∵ $٢^{٢س+٢ص}$ = $٢^{٧}$

∴ ٢ س + ٢ ص = ٧   (١)

، ∵ $٥^{س−٢ص−٣}$ = ١

∴ س − ٢ ص = ٣   (٢)

بجمع (١) ، (٢)

∴ ٣ س = ١٠   ∴ س = $\frac{١٠}{٣}$

، بالتعويض في (١)   ∴ ص = $\frac{١}{٦}$

∴ مجموعة الحل = {($\frac{١٠}{٣}$ ، $\frac{١}{٦}$)}

② $٣^{س}$ × $٥^{ص}$ = ٧٥ (١) ، $٣^{ص}$ × $٥^{س}$ = ٤٥ (٢)

وبقسمة (١) على (٢)

∴ $(\frac{٣}{٥})^{س}$ × $(\frac{٥}{٣})^{ص}$ = $\frac{٧٥}{٤٥}$

∴ $(\frac{٥}{٣})^{-س}$ × $(\frac{٥}{٣})^{ص}$ = $\frac{٥}{٣}$

∴ $(\frac{٥}{٣})^{ص−س}$ = $\frac{٥}{٣}$ ∴ ص − س = ١   (٣)

وبضرب (١) × (٢)

∴ $(١٥)^{س}$ × $(١٥)^{ص}$ = ٧٥ × ٤٥

∴ $(١٥)^{س+ص}$ = $١٥^{٣}$ ∴ س + ص = ٣   (٤)

بجمع (٣) ، (٤) نجد أن: ٢ ص = ٤

∴ ص = ٢ وبالتعويض في (٣) : ∴ س = ١

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٢)}

③ $٣^{س}$ × $٣^{ص}$ = $٣^{٣}$ ∴ $٣^{س+ص}$ = $٣^{٣}$

∴ س + ص = ٣   ∴ ص = ٣ − س

، ∵ $٣^{س}$ + $٣^{ص}$ = ١٢

∴ $٣^{س}$ + $٣^{٣−س}$ = ١٢ وبالضرب × $٣^{س}$

∴ $٣^{٢س}$ + ٢٧ = ١٢ $(٣)^{س}$

∴ $٣^{٢س}$ − ١٢ $(٣)^{س}$ + ٢٧ = ٠

∴ ($٣^{س}$ − ٣) ($٣^{س}$ − ٩) = ٠

∴ إما $٣^{س}$ = ٣   ∴ س = ١ ومنها ص = ٢

أو $٣^{س}$ = ٩   ∴ $٣^{س}$ = $٣^{٢}$

∴ س = ٢ ومنها ص = ١

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ١)}

١١

∵ $٩^{س+١}$ − ($٣^{س+٢}$ + $٣^{س}$) + ٣ = ٠

∴ $٩^{س}$ × ٩ − $٣^{س}$ ($٣^{٢}$ + ١) + ٣ = ٠

∴ ٩ × $٣^{٢س}$ − ٢٨ × $٣^{س}$ + ٣ = ٠

∴ (٩ × $٣^{س}$ − ١) ($٣^{س}$ − ٣) = ٠

∴ ٩ × $٣^{س}$ − ١ = ٠ ومنها $٣^{س}$ = $\frac{١}{٩}$

∴ $٣^{س}$ = $٣^{-٢}$ ∴ س = −٢

أو $٣^{س}$ − ٣ = ٠ ومنها $٣^{س}$ = ٣   ∴ س = ١

∴ مجموعة الحل = {−٢ ، ١}

١٢

∵ $س^{م+١}$ = $ص^{م−١}$

∴ $(س^{م+١})^{٢}$ = $(ص^{م−١})^{٢}$

∴ $(س^{٢})^{م+١}$ = $ص^{٢م−٢}$

، ∵ $س^{٢}$ = $ص^{٣}$

∴ $(ص^{٣})^{م+١}$ = $ص^{٢م−٢}$

∴ $ص^{٣م+٣}$ = $ص^{٢م−٢}$

∴ ٣ م + ٣ = ٢ م − ٢   ∴ م = −٥

13

① (ب) ② (د) ③ (جـ) ④ (جـ)

⑤ (جـ) ⑥ (جـ) ⑦ (د) ⑧ (د)

⑨ (د)

إرشادات لحل رقم 13

① $\because \sqrt{\text{س}^2} = |\text{س}| = -\text{س}$ لأن (س < ٠)

، $\sqrt[3]{\text{س}^3} = \text{س}$

، $\sqrt{\text{س}^2 - ٢\text{س} + ١} = \sqrt{(\text{س} - ١)^2}$

$= |\text{س} - ١| = ١ - \text{س}$

(لأن س < ٠)

$\therefore \sqrt{\text{س}^2} - \sqrt[3]{\text{س}^3} - \sqrt{\text{س}^2 - ٢\text{س} + ١} + ١$

$= -\text{س} - \text{س} - (١ - \text{س}) + ١ = -\text{س}$

② $\because \text{أ} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{٢}}{\sqrt{٧}}}$ $\therefore \text{أ}^4 = \frac{\sqrt[3]{٢}}{\sqrt{٧}}$

$\therefore (\text{أ}^4)^6 = \frac{٤}{٣٤٣}$ عدد نسبي.

$\therefore \text{أ}^{٢٤}$ عدد نسبي.

③ (جـ) لا تكون دائما صحيحة لأن

$\sqrt{\text{س}^2 \text{ص}^4} = |\text{س ص}^2|$

④ $\because \text{س}^{\frac{٣}{٢}} = \text{س}^{\frac{١}{٢}}$ $\therefore \text{س}^{\frac{١}{٢}} - \text{س}^{\frac{٣}{٢}} = ٠$

$\therefore \text{س}^{\frac{١}{٢}} (١ - \text{س}^{\frac{٢}{٢}}) = ٠$

$\therefore \text{س}^{\frac{١}{٢}} = ٠$

ومنها س = ٠ أ، $١ - \text{س}^{\frac{٢}{٢}} = ٠$

ومنها $\text{س}^{\frac{٢}{٢}} = ١$ ∴ س = ١

∴ م.ح = {٠ ، ١}

⑤ $\sqrt[5]{\frac{٢}{٢٧}} = \sqrt[5]{\frac{٣ \times ٣ \times ٢}{٣ \times ٣ \times ٢٧}} = \sqrt[5]{\frac{١٨}{٢٤٣}} = \frac{\sqrt[5]{١٨}}{٣}$

⑥ $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}^{\text{ن}}} = (\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}})^{\text{ن}}$ صحيحة لكل $\sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} \in \text{ح}$

، ن ∈ ص⁺ − {١}

⑦ $\because \text{س}^{\frac{٢}{٣}} = \text{أ}$

$\therefore \text{س} = \text{أ}^{\frac{٣}{٢}} = (\sqrt{\text{أ}})^3$

∴ لابد وأن تكون أ ≥ ٠

أى أن أ ∈ ح⁺ ∪ {٠}

⑧ $\because \sqrt[3]{٢\sqrt{٣\sqrt{٢}}} = \sqrt[6]{\text{م}\sqrt{٢}}$ برفع الطرفين لأس (٦)

$\therefore (٢\sqrt{٣\sqrt{٢}})^2 = \text{م}\sqrt{٢}$

$\therefore ٤ \times ٣\sqrt{٢} = \text{م}\sqrt{٢}$ ∴ م = ١٢

⑨ $\sqrt[\text{م}]{\text{أ}} \times \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} = \text{أ}^{\frac{١}{\text{م}}} \times \text{أ}^{\frac{١}{\text{ن}}} = \text{أ}^{\frac{١}{\text{م}} + \frac{١}{\text{ن}}}$

$= \text{أ}^{\frac{\text{م}+\text{ن}}{\text{م ن}}}$

$= \sqrt[\text{م ن}]{\text{أ}^{\text{م}+\text{ن}}}$

14

① $\frac{٥^{\text{س}-١} \times \text{س}^{٢-\text{س}}}{٥} = ١$

$\therefore ٥^{\text{س}-٢} \times \text{س}^{٢-\text{س}} = ١$

$\therefore ٥^{\text{س}-٢} = \text{س}^{\text{س}-٢}$

∴ س = ٥ أ، س = ٢

∴ مجموعة الحل = {٥ ، ٢}

② $\because (\text{س} - ٣)^{\text{س}-٥} = ١$

∴ إما س − ٥ = ٠ ومنها س = ٥

أ، س − ٣ = ١ ومنها س = ٤

أ، س − ٣ = −١ (إذا كان الأس زوجيًا)

ومنها س = ٢ (مرفوض) لأن الأس (٢ − ٥) فردي.

∴ مجموعة الحل = {٥ ، ٤}

③ $\because (\text{س} - ٣)^{(\text{س}-٦)} = ١$

∴ إما س − ٦ = ٠ ومنها س = ٦

أ، س − ٣ = ١ ومنها س = ٤

أ، س − ٣ = −١ (إذا كان الأس زوجيًا)

ومنها س = ٢ (يتحقق) (لأن الأس (٢ − ٦) زوجي)

∴ مجموعة الحل = {٦ ، ٤ ، ٢}

إجابات تمارين 8

1

① ليست أسية

② دالة أسية ، أساسها = ٥ ، أسها = س

③ ليست أسية ④ ليست أسية

⑤ دالة أسية ، أساسها = $\frac{٢}{٣}$ ، أسها = س − ١

⑥ ليست أسية

2

① (د) ② (أ) ③ (ب) ④ (جـ) ⑤ (جـ)

3

$\frac{\text{د}(\text{س} + ٤) - \text{د}(\text{س} + ٢)}{\text{د}(\text{س} + ٥) - \text{د}(\text{س} + ٤)} = \frac{٥^{\text{س}+٤} - ٥^{\text{س}+٢}}{٥^{\text{س}+٥} - ٥^{\text{س}+٤}}$

$= \frac{٥^{\text{س}+٢}(٥ - ١)}{٥^{\text{س}+٤}(٥ - ١)} = \frac{١}{٥}$

4

$\because \text{د}(٢\text{س} - ١) + \text{د}(\text{س} - ٢) = ٥٠$

$\therefore ٧^{(٢\text{س}-١)+١} + ٧^{(\text{س}-٢)+١} = ٥٠$

$\therefore ٧^{٢\text{س}} + ٧^{\text{س}-١} = ٥٠$

$\therefore ٧^{٢\text{س}} + ٧^{-١} \times ٧^{\text{س}} = ٥٠$

$\therefore ٧^{٢\text{س}} + \frac{١}{٧} \times ٧^{\text{س}} = ٥٠$ (بالضرب × ٧)

$\therefore ٧ \times ٧^{٢\text{س}} + ٧^{\text{س}} - ٣٥٠ = ٠$

$\therefore (٧ \times ٧^{\text{س}} + ٥٠)(٧^{\text{س}} - ٧) = ٠$

$\therefore ٧ \times ٧^{\text{س}} + ٥٠ = ٠$ ومنها $٧^{\text{س}} = \frac{-٥٠}{٧}$ (مرفوض)

أ، $٧^{\text{س}} - ٧ = ٠$ ∴ $٧^{\text{س}} = ٧$ ∴ س = ١

5

$\because \text{د}_1(٢\text{س} - ١) + \text{د}_2(\text{س} + ١) = ٧٥٦$

$\therefore ٣^{٢\text{س}-١} + ٩^{\text{س}+١} = ٧٥٦$

$\therefore ٣^{٢\text{س}-١} + ٣^{٢\text{س}+٢} = ٧٥٦$

$\therefore ٣^{٢\text{س}}(٣^{-١} + ٣^2) = ٧٥٦$

$\therefore ٣^{٢\text{س}} \times \frac{٢٨}{٣} = ٧٥٦$

$\therefore ٣^{٢\text{س}} = ٧٥٦ \times \frac{٣}{٢٨}$

$\therefore ٣^{٢\text{س}} = ٨١$ $\therefore ٣^{٢\text{س}} = ٣^4$

∴ ٢س = ٤ ∴ س = ٢

6

الطرف الأيمن $= \frac{\text{ص}^{\text{س}+١} + \text{ص}^{\text{س}+٢}}{\text{ص}^{\text{س}+١} + \text{ص}^{\text{س}}}$

$= \frac{\text{ص}^{\text{س}+١}(١ + \text{ص})}{\text{ص}^{\text{س}}(\text{ص} + ١)} = \text{ص}$

7

الطرف الأيمن $= \frac{٣^{٢\text{س}+٢} + ٣^{٢\text{س}-١}}{٥ \times ٣^{٢\text{س}} - ٧ \times ٣^{٢\text{س}-١}}$

$= \frac{٣^{٢\text{س}-١}(٣^3 + ١)}{٣^{٢\text{س}-١}(٥ \times ٣ - ٧)} = \frac{٢٨}{٨} = \frac{٧}{٢}$

8

الطرف الأيمن $= \frac{٣^{٢(\text{س}+١)-١} \times ٣^{٢(\text{س}+٣)-١}}{٣^{٢(\text{س}+٣)-١}}$

$= \frac{٣^{٢\text{س}+٢} \times ٣^{٢\text{س}+٥}}{٣^{٢\text{س}+٨}}$

$= ٣^{٢\text{س}+٢+٢\text{س}+٥-٢\text{س}-٨}$

$= ٣^{٢\text{س}-١} = \text{د}(\text{س})$

9

الطرف الأيمن $= \frac{٣^{\text{س}+١}}{٣^{\text{س}-١}} + \frac{٣^{\text{س}-١}}{٣^{\text{س}+١}} = ٣^2 + \frac{١}{٣^2} = \frac{٨٢}{٩}$

١٠

∵ $٧^{٢س-١} + ٧^{٢س+١} = \frac{٥٠}{٤٩}$

∴ $٧^{٢س-١}(١ + ٤٩) = \frac{٥٠}{٤٩}$

∴ $٧^{٢س-١} = ٧^{-٢}$ ∴ $٢س - ١ = -٢$

∴ $٢س = -١$ ∴ $س = -\frac{١}{٢}$

١١

∵ $\frac{٢^{س+١} - ٢^{س}}{٢^{س} - ٢^{س-١}} = ٢^{س-٢}$

∴ $\frac{٢^{س}(٢ - ١)}{٢^{س-١}(٢ - ١)} = ٢^{س-٢}$

∴ $٢ = ٢^{س-٢}$

∴ $س - ٢ = ١$ ∴ $س = ٣$

١٢

∵ $\frac{٣^{-٢س-١}}{٣^{-س+١}} = ٧٢٩$

∴ $٣^{-٢س-١+س-١} = ٣^{٦}$

∴ $-س - ٢ = ٦$ ∴ $س = -٨$

∴ مجموعة الحل = {−٨}

١٣

∵ $٣^{س+١} + ٣^{٢-س} = ٣٠$ وبالضرب × $٣^{س-١}$

∴ $٣^{٢س} + ٣^{٢} - ١٠ \times ٣ \times ٣^{س-١} = ٠$

∴ $٣^{٢س} - ١٠ \times ٣^{س} + ٩ = ٠$

∴ $(٣^{س} - ١)(٣^{س} - ٩) = ٠$

∴ $٣^{س} = ١$ ومنها س = ٠ أ، $٣^{س} = ٩$

ومنها س = ٢

١٤

∵ $٢^{٢س} - ٦ \times ٢^{س} + ٨ = ٠$

∴ $(٢^{س} - ٢)(٢^{س} - ٤) = ٠$

∴ $٢^{س} = ٢$ ومنها س = ١ أ، $٢^{س} = ٤$ ومنها س = ٢

∴ مجموعة الحل = {١ ، ٢}

١٥

∵ $٢^{س} + ٢^{\frac{س}{٢}} = ١٢$ وبوضع $٢^{\frac{س}{٢}} =$ ص

∴ $ص^{٢} + ص - ١٢ = ٠$

∴ (ص + ٤) (ص − ٣) = ٠

∴ ص = − ٤ (مرفوض) أ، ص = ٢ ومنها $٢^{\frac{س}{٢}} = ٢$

∴ $\frac{س}{٢} = ١$ ∴ س = ٢

∴ مجموعة الحل = {٢}

١٦

∵ د (س − ٢) = $٣^{س}$ ∴ د (س) = $٣^{س+٢}$

، ∵ د (٣ س + ١) − د (٣ س − ١) = ٢٤

∴ $٣^{٣س+٣} - ٣^{٣س+١} = ٢٤$

∴ $٣^{٣س+١}(٣^{٢} - ١) = ٢٤$

∴ $٣^{٣س+١} \times ٨ = ٢٤$ ∴ $٣^{٣س+١} = ٣$

∴ ٣ س + ١ = ١ ∴ ٣ س = صفر

∴ س = صفر

١٧

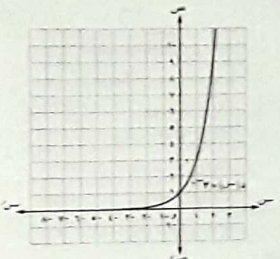
① (ب)	② (ج)	③ (ج)	④ (أ)
⑤ (أ)	⑥ (ب)	⑦ (ب)	⑧ (ج)
⑨ (ج)	⑩ (ب)	⑪ (ب)	⑫ (ب)
⑬ (ج)	⑭ (د)	⑮ (أ)	⑯ (د)
⑰ (ب)	⑱ (ب)		

١٨

① شكل (٧)	② شكل (٢)
③ شكل (٥)	④ شكل (١)
⑤ شكل (٦)	⑥ شكل (٣)
⑦ شكل (٤)	⑧ شكل (٨)

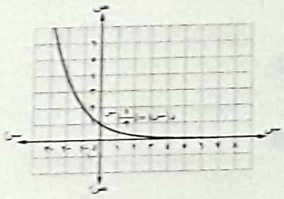
١٩

① د (س) = $٢^{س}$



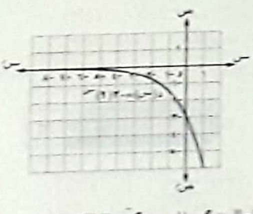
المجال = ح ، المدى = $ح^{+}$ ، الدالة تزايدية على مجالها.

② د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$



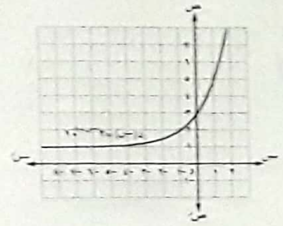
المجال = ح ، المدى = $ح^{+}$ ، الدالة تناقصية على مجالها

③ د (س) = $-٣ (٢)^{س}$



المجال = ح ، المدى = $ح^{-}$ ، الدالة تناقصية على مجالها

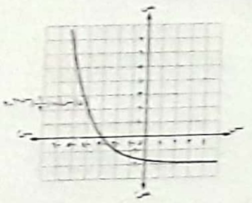
④ د (س) = $٢^{س+١} + ١$



المجال = ح ، المدى =]١ ، ∞[

، الدالة تزايدية على مجالها

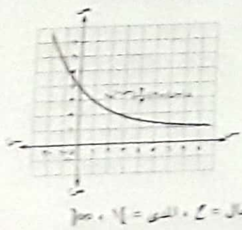
⑤ د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س+٢} - ٢$



المجال = ح ، المدى =]−٢ ، ∞[

، الدالة تناقصية على مجالها.

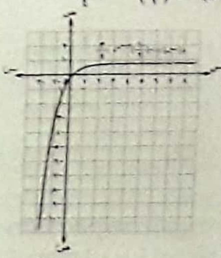
⑥ د (س) = $٢\left(\frac{٢}{٣}\right)^{س-١} + ١$



المجال = ح ، المدى =]١ ، ∞[

، الدالة تناقصية على مجالها.

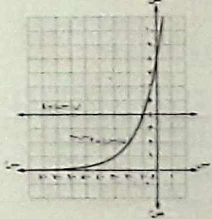
⑦ د (س) = − $(\frac{١}{٢})^{س}$ + $\frac{٣}{٤}$



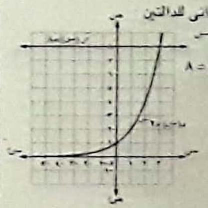
المجال = ح ، المدى =]− ∞ ، $\frac{٣}{٤}$[
، الدالة تزايدية على مجالها.

٢٠

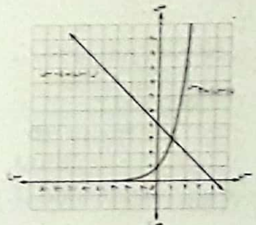
① من التمثيل البياني للدالتين
∵ د (س) = $٢^{س+٣}$ ، ر : ر (س) = ٤
∴ مجموعة الحل = {−١}



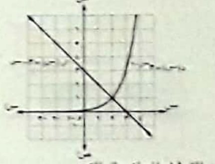
② من التمثيل البياني للدالتين
∵ د (س) = $٢^{س}$
، ر : ر (س) = ٨
∴ مجموعة
الحل = {٣}



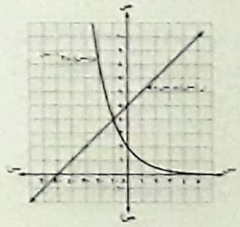
③ من التمثيل البياني للدالتين
∵ د (س) = $٣^{س}$ ، ر : ر (س) = ٤ − س
∴ مجموعة الحل = {١}



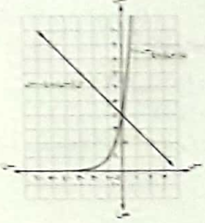
④ من التمثيل البياني للدالتين
∵ د (س) = $٢^{س−٢}$ ، ر : ر (س) = ٣ − س
∴ مجموعة الحل = {٢}



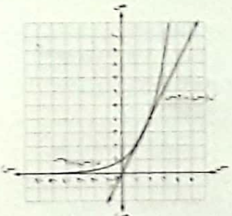
⑤ من التمثيل البياني للدالتين
∵ د (س) = $٢^{١−س}$ ، ر : ر (س) = س + ٥
∴ مجموعة الحل = {−١}



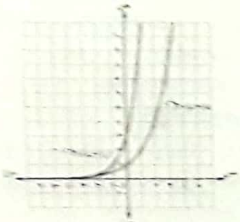
⑥ من التمثيل البياني للدالتين
∵ د (س) = $٤^{س+١}$
، ر : ر (س) = ٤ − س
∴ مجموعة الحل = {٠}



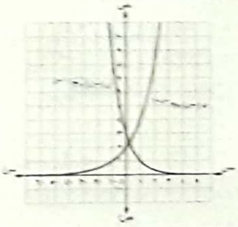
⑦ من التمثيل البياني للدالتين
∵ د (س) = $٢^{س}$
، ر : ر (س) = ٢ س
∴ مجموعة الحل = {١ ، ٢}



⑧ من التمثيل البياني للدالتين
∵ د (س) = $٢^{س}$
، ر : ر (س) = ٣ س + ١٠
∴ س = − ٢ $\frac{٣}{٤}$
∴ مجموعة الحل = {− ٢ $\frac{٣}{٤}$}

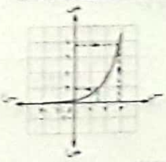


⑨ من التمثيل البياني للدالتين
∵ د (س) = $٢^{س+١}$
، ر : ر (س) = $٢^{٢−س}$
∴ س = $\frac{١}{٢}$
∴ مجموعة الحل = {$\frac{١}{٢}$}



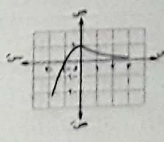
٢١

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣
د (س)	$\frac{١}{٢٧}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩



ومن الرسم
① د ($\frac{٣}{٢}$) = ١٫٧
② عندما $٣^{س−١}$ = ٧ $\frac{١}{٢}$ فإن س = ٢٫٨

٢٢



ومن الرسم

• المجال = ح ، المدى =]− ∞ ، ١]

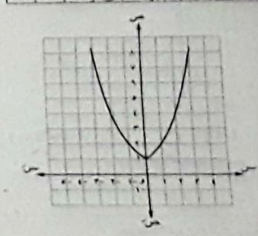
• الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ٠[، وتناقصية فى]٠ ، ∞[

٢٣

د (س) = $٢^{س}$ ، س ≥ ٠

د (س) = $٢^{-س}$ ، س < ٠

س	٠	١	٢	٣	⓪	-١	-٢	-٣
د (س)	١	٢	٤	٨	①	٢	٤	٨



• المدى = [١ ، ∞[

• الدالة تناقصية فى]− ∞ ، ٠[، وتزايدية فى]٠ ، ∞[

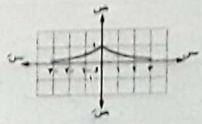
• الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات.

٢٤

د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{س}$ عندما س ≥ ٠

د (س) = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{-س}$ عندما س < ٠

س	٠	١	٢	٣	⓪	-١	-٢	-٣
د (س)	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$	①	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٨}$



• المدى =]٠ ، ١]

• الدالة تزايدية فى]− ∞ ، ٠[، وتناقصية فى]٠ ، ∞[

• الدالة زوجية لأنها متماثلة حول محور الصادات.

٢٥

∵ $٥^{١ + جاس} + ٥^{١ - جاس}$ = ٢٦

∴ $٥^{جاس}$ (٥ + $٥^{-١}$) = ٢٦

∴ $٥^{جاس}$ = ٥ ∴ جاس = ١

∴ س = $\frac{\pi}{٢}$ + ٢ π ن حيث ن ∈ ص

٢٦

المقدار = $\frac{١}{٢^{س} + ١} + \frac{١}{٢^{-س} + ١} \times \frac{٢^{س}}{٢^{س}}$

= $\frac{١}{٢^{س} + ١} + \frac{٢^{س}}{١ + ٢^{س}} = \frac{١ + ٢^{س}}{١ + ٢^{س}}$ = ١

∴ قيمة المقدار = ١ مهما كانت قيمة س

٢٧

∵ دالة الرصيد هى د (ن) = أ $(١ + ر)^{ن}$

∴ الرصيد بعد ١٠ سنوات = ٨٠٠٠٠ $\left(١ + \frac{١٠,٥}{١٠٠}\right)^{١٠}$

= ٨٠٠٠٠ $(١,١٠٥)^{١٠}$

= ٢١٧١٢٦ جنيهًا.

٢٨

① عدد السكان بعد مرور ن سنة من عام ٢٠٠٠

= أ $(١ + ر)^{ن}$

= ٤٣,٣ $\left(١ + \frac{١,٥}{١٠٠}\right)^{ن}$ = ٤٣,٣ $(١,٠١٥)^{ن}$

② عام ٢٠٢٠ يكون عدد السنين = ٢٠٢٠ − ٢٠٠٠

= ٢٠ سنة.

∴ عدد السكان = ٤٣,٣ $(١,٠١٥)^{٢٠}$

= ٥٨,٣ مليون نسمة.

٢٩

أ = ٣٦٤٠٠ ، ر = $\frac{٤}{١٠٠}$ = ٠,٠٤ ، ن = عدد المباريات

عدد الحضور (ص) = أ $(١ - ر)^{ن}$

= ٣٦٤٠٠ $(١ - ٠,٠٤)^{ن}$

= ٣٦٤٠٠ $(٠,٩٦)^{ن}$

، فى المباراة العاشرة :

يكون عدد الحضور (ص) = ٣٦٤٠٠ $(٠,٩٦)^{١٠}$

= ٢٤٢٠٠ مُشجع

٣٠

أ = ٨٠ ، ر = $\frac{١٨}{١٠٠}$ = ٠,١٨ ، ن = ٤ سنوات.

∴ عدد الأبقار = أ $(١ + ر)^{ن}$

، عدد الأبقار بعد ٤ سنوات = ٨٠ $(١ + ٠,١٨)^{٤}$

= ١٥٥ بقرة.

٣١

أ = ٤,٦ ، ر = $\frac{٤}{١٠٠}$ = ٠,٠٤

① دالة النمو المستقبلى بعد ن سنة = أ $(١ + ر)^{ن}$

= ٤,٦ $(١ + ٠,٠٤)^{ن}$

= ٤,٦ $(١,٠٤)^{ن}$ مليون نسمة.

② بعد خمس سنوات :

عدد السكان = ٤,٦ $(١,٠٤)^{٥}$ ≃ ٥,٦ مليون نسمة.

٣٢

أ = ٢٥٤ ، ر = $\frac{٥}{١٠٠}$ = ٠,٠٥

، الفترة الزمنية ن = ٩ سنوات.

∴ دالة التضاؤل الأسى هى :

د (ن) = أ $(١ - ر)^{ن}$ = ٢٥٤ $(١ - ٠,٠٥)^{ن}$

= ٢٥٤ $(٠,٩٥)^{ن}$

∴ إنتاج المنجم فى السنة التاسعة = ٢٥٤ $(٠,٩٥)^{٩}$

= ١٦٠ كجم.

٣٣

أ = ٢٠٠٠ ، ر = $\frac{٧}{١٠٠}$ = ٠,٠٧

، الفترة الزمنية ن = ١١ ساعة.

∴ دالة النمو الأسى هى د (ن) = أ $(١ + ر)^{ن}$

= ٢٠٠٠ $(١ + ٠,٠٧)^{ن}$

= ٢٠٠٠ $(١,٠٧)^{ن}$

∴ كمية البكتريا بعد ١١ ساعة = ٢٠٠٠ $(١,٠٧)^{١١}$

= ٤٢١٠ بكتريا.

٣٤

باستخدام العلاقة حـ = أ $\left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$

① العائد السنوى. ∴ س = ١

حـ = ٥٠٠٠ $(١ + ٠,٠٨)^{١٠}$ = ١٠٧٩٤,٦٢ جنيه.

② العائد الربع سنوى. ∴ س = ٤

حـ = ٥٠٠٠ $\left(١ + \frac{٠,٠٨}{٤}\right)^{١٠ \times ٤}$ = ١١٠٤٠,٢ جنيه.

③ العائد الشهرى. ∴ س = ١٢

حـ = ٥٠٠٠ $\left(١ + \frac{٠,٠٨}{١٢}\right)^{١٠ \times ١٢}$ = ١١٠٩٨,٢ جنيه.

٣٥

① (د) ② (جـ) ③ (د) ④ (جـ)

⑤ (د) ⑥ (أ) ⑦ (د) ⑧ (أ)

إرشادات لحل رقم ٣٥

① ∵ الدالة متناقصة إذا كان : ٠ < ٢ أ < ١

∴ ٠ < أ < $\frac{١}{٢}$ ∴ أ ∈]٠ ، $\frac{١}{٢}$[

Scanned by CamScanner

② ∵ الدالة تزايدية ∴ $\frac{أ}{٢} > ١$ ∴ أ > ٢

③ ∵ د (س) = $(أ - ٢)^{س}$ دالة أسية.

∴ أ − ٢ > ٠ ، أ − ٢ ≠ ١

∴ أ > ٢ ، أ ≠ ٣

∴ أ ∈]٢ ، ∞[− {٣}

④ المنحنى يقطع محور السينات عندما ص = ٠

وبالتعويض عن د (س) = ٠ في الدوال المعطاة لا نحصل على أي قيمة للمتغير س الا في الحالة رقم (جـ)

$٢^{س} - ١ = ٠$ ∴ $٢^{س} = ١$ ∴ س = ٠

أي المنحنى يقطع محور السينات في النقطة (٠ ، ٠)

⑤ بحل المعادلتين ص = ٨ ، ص = $٢^{س}$ معًا

∴ س = ٣

وبحل المعادلتين ص = ٨ ، ص = $(\frac{١}{٢})^{س}$ معًا

∴ س = −٣

∴ الاحداثيات السينية للنقطتين أ ، ب هما −٣ ، ٣

∴ طول $\overline{أب}$ = ٦ وحدات.

⑥ نعلم أن انعكاس منحنى الدالة د (س) = $٢^{س}$ حول محور الصادات يعطي منحنى الدالة د (س) = $٢^{-س}$ ثم ازاحته ٥ وحدات لأعلى يعطي المنحنى د (س) = ٥ + $٢^{-س}$

⑦ ∵ د (س) = $\frac{٩^{س}}{٩^{س} + ٣}$

∴ د (١ − س) = $\frac{٩^{١ - س}}{٩^{١ - س} + ٣}$

بالضرب بسطًا ومقامًا في $٩^{س}$

∴ د (١ − س) = $\frac{٩}{٩ + ٣ \times ٩^{س}}$

= $\frac{٩}{٣(٣ + ٩^{س})}$ = $\frac{٣}{٣ + ٩^{س}}$

∴ د (س) + د (١ − س)

= $\frac{٩^{س}}{٩^{س} + ٣}$ + $\frac{٣}{٣ + ٩^{س}}$ = $\frac{٩^{س} + ٣}{٩^{س} + ٣}$ = ١

⑧ ∵ د (س) = $\frac{٤^{س}}{٤^{س} + ٢}$

∴ د (١ − س) = $\frac{٤^{١ - س}}{٤^{١ - س} + ٢}$

بالضرب بسطًا ومقامًا في $٤^{س}$

∴ د (١ − س) = $\frac{٤}{٤ + ٢ \times ٤^{س}}$

= $\frac{٤}{٢(٢ + ٤^{س})}$ = $\frac{٢}{٢ + ٤^{س}}$

∴ د (س) + د (١ − س)

= $\frac{٤^{س}}{٤^{س} + ٢}$ + $\frac{٢}{٢ + ٤^{س}}$ = $\frac{٤^{س} + ٢}{٤^{س} + ٢}$ = ١

∴ د $(\frac{١}{١١})$ + د $(\frac{١٠}{١١})$ = ١

، د $(\frac{٢}{١١})$ + د $(\frac{٩}{١١})$ = ١

، د $(\frac{٣}{١١})$ + د $(\frac{٨}{١١})$ = ١

، د $(\frac{٤}{١١})$ + د $(\frac{٧}{١١})$ = ١

، د $(\frac{٥}{١١})$ + د $(\frac{٦}{١١})$ = ١

∴ المقدار المطلوب = ٥

إجابات تمارين 9

١

① (جـ)	② (د)	③ (ب)	④ (جـ)
⑤ (ب)	⑥ (جـ)	⑦ (ب)	⑧ (جـ)
⑨ (ب)	⑩ (ب)	⑪ (ب)	⑫ (ب)
⑬ (ب)	⑭ (جـ)	⑮ (أ)	⑯ (أ)

٢

①

س	٧	٤	١	−١
$د^{-١}$ (س)	−٢	١	٢	٥

② $د^{-١}$ = {(٢ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ٣)}

③ بوضع س = ٢ ص + ٥ ∴ ص = $\frac{س - ٥}{٢}$

∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{س - ٥}{٢}$

④ بوضع س = $\frac{١}{٢}$ ص + ٤ ∴ ص = ٢ س − ٨

∴ $د^{-١}$ (س) = ٢ س − ٨

⑤ بوضع س = ٥ + $\frac{٤}{ص}$ ∴ $\frac{٤}{ص}$ = س − ٥

∴ ص = $\frac{٤}{س - ٥}$ ∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{٤}{س - ٥}$

⑥ بوضع س = ٨ $ص^{٣}$ − ١ ∴ ٨ $ص^{٣}$ = س + ١

∴ $ص^{٣}$ = $\frac{١}{٨}$ (س + ١)

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ $\sqrt[٣]{س + ١}$

∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٢}$ $\sqrt[٣]{س + ١}$

⑦ بوضع س = $\sqrt{ص + ١}$

∴ ص + ١ = $س^{٢}$ ∴ ص = $س^{٢}$ − ١

∴ $د^{-١}$ (س) = $س^{٢}$ − ١

⑧ بوضع س = $\sqrt[٣]{٤ - ص}$ ∴ ٤ − ص = $س^{٣}$

∴ ص = ٤ − $س^{٣}$

∴ $د^{-١}$ (س) = ٤ − $س^{٣}$

⑨ ∵ ص = ٢ + $\sqrt{٣ - س}$ حيث س ≥ ٣ ، ص ≤ ٢

وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ + $\sqrt{٣ - ص}$

حيث ص ≤ ٣ ، س ≤ ٢ ∴ $\sqrt{٣ - ص}$ = س − ٢

∴ ٣ − ص = $(س - ٢)^{٢}$

∴ ص = ٣ − $(س - ٢)^{٢}$

∴ $د^{-١}$ (س) = ٣ − $(س - ٢)^{٢}$ لكل س ≤ ٢

⑩ ∵ ص = $س^{٢}$ حيث س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠

وبتبديل المتغيرين

∴ س = $ص^{٢}$ حيث ص ≤ ٠ ، س ≤ ٠

∴ ص = $\sqrt{س}$

∴ $د^{-١}$ (س) = $\sqrt{س}$ لكل س ≤ ٠

⑪ ∵ ص = $(س + ٢)^{٢}$ حيث س ≥ −٢ ، ص ≤ ٠

وبتبديل المتغيرين

∴ س = $(ص + ٢)^{٢}$ حيث ص ≥ −٢ ، س ≤ ٠

∴ ص + ٢ = − $\sqrt{س}$ ∴ ص = − $\sqrt{س}$ − ٢

∴ $د^{-١}$ (س) = − $\sqrt{س}$ − ٢ لكل س ≤ ٠

⑫ ∵ ص = $(س - ١)^{٢}$ + ٢ حيث س ≤ ١

، ص ≤ ٢ وبتبديل المتغيرين

∴ س = $(ص - ١)^{٢}$ + ٢ حيث ص ≤ ١ ، س ≤ ٢

∴ $(ص - ١)^{٢}$ = س − ٢

∴ ص − ١ = $\sqrt{س - ٢}$

∴ ص = $\sqrt{س - ٢}$ + ١

∴ $د^{-١}$ (س) = $\sqrt{س - ٢}$ + ١ لكل س ≤ ٢

⑬ ∵ ص = $س^{٢}$ + ٨ س + ٧ = $(س + ٤)^{٢}$ − ٩

حيث س ≤ −٤ ، ص ≤ −٩ وبتبديل المتغيرين

∴ س = $ص^{٢}$ + ٨ ص + ٧ حيث ص ≤ −٤

، س ≤ −٩

∴ س = $ص^{٢}$ + ٨ ص + ١٦ − ٩

∴ س = $(ص + ٤)^{٢}$ − ٩

∴ $(ص + ٤)^{٢}$ = س + ٩

∴ ص + ٤ = $\sqrt{س + ٩}$

∴ ص = $\sqrt{س + ٩}$ − ٤

∴ $د^{-١}$ (س) = $\sqrt{س + ٩}$ − ٤ لكل س ≤ −٩

⑭ ∵ ص = $\sqrt{٩ - س^{٢}}$ حيث −٣ ≥ س ≥ ٠

، ٠ ≥ ص ≥ ٣ وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\sqrt{٩ - ص^{٢}}$ ، −٣ ≥ ص ≥ ٠

، ٠ ≥ س ≥ ٣

∴ $س^{٢}$ = ٩ − $ص^{٢}$ ∴ $ص^{٢}$ = ٩ − $س^{٢}$

∴ ص = − $\sqrt{٩ - س^{٢}}$

∴ $د^{-١}$ (س) = − $\sqrt{٩ - س^{٢}}$

لكل ٠ ≥ س ≥ ٣

⑮ ∵ ص = $\sqrt{٩ - س^٢}$ حيث ٠ ≥ س ≥ ٣

، ٠ ≥ ص ≥ ٣ وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\sqrt{٩ - ص^٢}$ ، ٠ ≥ ص ≥ ٣

، ٠ ≥ س ≥ ٣

∴ $س^٢ = ٩ - ص^٢$ ∴ $ص^٢ = ٩ - س^٢$

∴ ص = $\sqrt{٩ - س^٢}$

∴ $د^{-١}$ (س) = $\sqrt{٩ - س^٢}$ لكل ٠ ≥ س ≥ ٣

⑯ ∵ ص = $\frac{١}{س^٢ + ٢}$ ، س ∈ $ح^*$

، ص ∈]٠ ، $\frac{١}{٢}$]

وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{١}{ص^٢ + ٢}$ ، ص ∈ $ح^*$

، س ∈]٠ ، $\frac{١}{٢}$]

∴ $ص^٢ + ٢ = \frac{١}{س}$ ∴ $ص^٢ = \frac{١}{س} - ٢$

∴ ص = $\sqrt{\frac{١}{س} - ٢}$

∴ $د^{-١}$ (س) = $\sqrt{\frac{١}{س} - ٢}$ ، س ∈]٠ ، $\frac{١}{٢}$]

٣

① لها دالة عكسية ② ليس لها دالة عكسية

③ ليس لها دالة عكسية ④ ليس لها دالة عكسية

٤

① ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د $\left(\frac{س + ٣}{٢}\right)$ = ٢ $\left(\frac{س + ٣}{٢}\right)$ − ٣

= س + ٣ − ٣ = س

، (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر (٢ س − ٣) = $\frac{(٢ س - ٣) + ٣}{٢}$ = س

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

② ∵ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د $\left(\sqrt{س - ٤}\right)$ = $\left(\sqrt{س - ٤}\right)^٢$ + ٤

= س − ٤ + ٤ = س

، ∵ (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر ($س^٢$ + ٤) = $\sqrt{س^٢ + ٤ - ٤}$

= $\sqrt{س^٢}$ = |س|

، ∵ س ≤ ٠ ∴ (ر ∘ د) (س) = س

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

③ ر (س) = $\frac{٥ س - ٢}{س}$

∴ ر (س) = ٥ − $\frac{٢}{س}$

∴ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د $\left(٥ - \frac{٢}{س}\right)$ = $\frac{-٢}{٥ - \frac{٢}{س} - ٥}$ = س

، (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر $\left(\frac{-٢}{س - ٥}\right)$ = ٥ − $\frac{٢}{\frac{-٢}{س - ٥}}$

= ٥ + س − ٥ = س

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

④ (د ∘ ر) (س) = د (ر (س))

= د $\left(\frac{س^٣}{٤}\right)$ = $\sqrt[٣]{٤ \times \frac{س^٣}{٤}}$ = س

، (ر ∘ د) (س) = ر (د (س))

= ر $\left(\sqrt[٣]{٤ س}\right)$

= $\frac{\left(\sqrt[٣]{٤ س}\right)^٣}{٤}$

= $\frac{٤ س}{٤}$ = س

∴ د ، ر كل منهما دالة عكسية للأخرى.

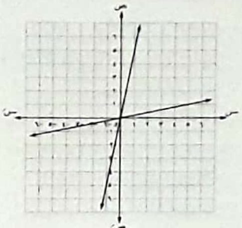
٥

① ∵ ص = ٥ س بتبديل المتغيرين.

∴ س = ٥ ص

∴ ص = $\frac{١}{٥}$ س

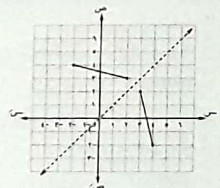
∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٥}$ س



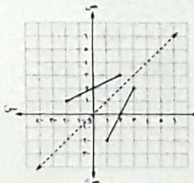
② $د^{-١}$ (ب) + ٢ $د^{-١}$ (حـ) = ٣ + ٢ × ٤ = ١١

٦

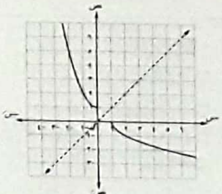
①



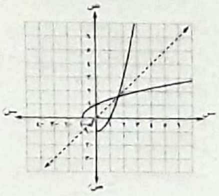
②



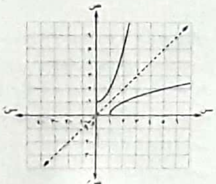
③



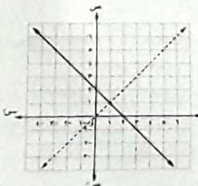
④



⑤



⑥



٧

① ∵ د (س) = ٢ س ∴ ص = ٢ س

بتبديل المتغيرين ∴ س = ٢ ص

∴ ص = $\frac{١}{٢}$ س

∴ د$^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٢}$ س ≠ د (س)

∴ د معكوسها ليس نفسها.

② ∵ د (س) = − س ∴ ص = − س

بتبديل المتغيرين ∴ س = − ص

∴ ص = − س

∴ د$^{-١}$ (س) = − س = د (س)

∴ د معكوسها هو نفسها.

③ ∵ د (س) = $\frac{٢}{س}$ ∴ ص = $\frac{٢}{س}$

بتبديل المتغيرين ∴ س = $\frac{٢}{ص}$

∴ ص = $\frac{٢}{س}$

∴ د$^{-١}$ (س) = $\frac{٢}{س}$ = د (س)

∴ د معكوسها هو نفسها.

④ ∵ د (س) = ٧ − س ∴ ص = ٧ − س

بتبديل المتغيرين ∴ س = ٧ − ص

∴ ص = ٧ − س

∴ د$^{-١}$ (س) = ٧ − س = د (س)

∴ د معكوسها هو نفسها.

⑤ ∵ د (س) = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٥

∴ ص = $\frac{١}{س - ٢}$ + ٥ بتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{١}{ص - ٢}$ + ٥

∴ س − ٥ = $\frac{١}{ص - ٢}$

∴ ص − ٢ = $\frac{١}{س - ٥}$

∴ ص = $\frac{١}{س - ٥}$ + ٢

∴ د$^{-١}$ (س) = $\frac{١}{س - ٥}$ + ٢ ≠ د (س)

∴ د معكوسها ليس نفسها.

⑥ ∵ د (س) = $\frac{١}{س - ك}$ + ك

∴ ص = $\frac{١}{س - ك}$ + ك

بتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{١}{ص - ك}$ + ك

∴ س − ك = $\frac{١}{ص - ك}$

∴ ص − ك = $\frac{١}{س - ك}$

∴ ص = $\frac{١}{س - ك}$ + ك

∴ د$^{-١}$ (س) = $\frac{١}{س - ك}$ + ك = د (س)

∴ د معكوسها هو نفسها.

٨

حل رنا هو الصواب لأن

د$^{-١}$ (س) ≠ $\frac{١}{د (س)}$ كما فى حل وائل

٩

① ∵ د (س) = س^{٢}

∴ د ليست أحادية على مجالها = ح

وتكون أحادية إذا كانت س ∈ [٠ ، ∞[

أو س ∈]− ∞ ، ٠]

∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية

= [٠ ، ∞[أو]− ∞ ، ٠]

② ∵ د (س) = س^{٣}

∴ د دالة أحادية على مجالها ح

∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية = ح

③ ∵ د (س) = $\frac{١}{٢}$ س

∴ د دالة أحادية على مجالها ح

∴ المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية = ح

١٠

∵ ص = $\frac{س - ١}{س + ٥}$ بتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{ص - ١}{ص + ٥}$

∴ س ص + ٥ س = ص − ١

∴ س ص − ص = −٥ س − ١

∴ ص (س − ١) = −٥ س − ١

∴ ص = $\frac{-٥ س - ١}{س - ١}$

∴ د$^{-١}$ (س) = $\frac{-٥ س - ١}{س - ١}$

١١

∵ د (س) = ٢ س + أ ∴ ص = ٢ س + أ

وبتبديل المتغيرين

∴ س = ٢ ص + أ

∴ ص = $\frac{س - أ}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$س − $\frac{أ}{٢}$

∴ د$^{-١}$ (س) = $\frac{١}{٢}$س − $\frac{أ}{٢}$

∵ د$^{-١}$ (س) = ر (س)

∴ $\frac{١}{٢}$س − $\frac{أ}{٢}$ = ب س + ٣

∴ ب = $\frac{١}{٢}$ ، − $\frac{أ}{٢}$ = ٣

∴ أ = −٦

١٢

① (أ)	② (جـ)	③ (أ)	④ (أ)
⑤ (جـ)	⑥ (د)	⑦ (ب)	⑧ (أ)

إرشادات لحل رقم ١٢

① ∵ د$^{-١}$ (٩) = ٢

∴ النقطة (٢ ، ٩) ∈ منحنى الدالة.

، ∵ د$^{-١}$ (٥) = ٢

∴ النقطة (٢ ، ٥) ∈ منحنى الدالة

، ∵ د (س) = أ س + ب

∴ ٣ أ + ب = ٩ (١)

، ٢ أ + ب = ٥ (٢)

بحل المعادلتين (١) ، (٢)

∴ أ = ٤ ، ب = −٣

∴ أ × ب = ٤ × −٣ = −١٢

② ∵ ر (س) = س − ٣

∴ ر$^{-١}$ (س) = س + ٣

، ∵ ر (د (س)) = ر (س^{٢}) = س^{٢} − ٣

، ∵ ر (د (س)) = ر$^{-١}$ (س)

∴ س^{٢} − ٣ = س + ٣

∴ س^{٢} − س − ٦ = ٠

∴ (س + ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٢ أ، س = ٣

∴ م.ح = {٣ ، −٢}

③ نضع د (س) = ٣ ونوجد قيمة س

∴ س = $\frac{د (س) + ١}{٢ - د (س)}$ = $\frac{٣ + ١}{٢ - ٣}$ = −٤

∴ د (−٤) = ٣ ∴ د$^{-١}$ (٣) = −٤

④ ∵ المجال ح − {١} ∴ ب = ١

∴ د (س) = $\frac{أ س + ٣}{س - ١}$ = أ + $\frac{٣ + أ}{س - ١}$

من قاعدة الدالة نجد أن نقطة تماثل المنحنى هى (١ ، أ)

ومن المجال والمجال المقابل نجد أن نقطة تماثل المنحنى هى (١ ، ٣)

∴ أ = ٣

∴ د (س) = $\frac{٣ س + ٣}{س - ١}$ وبتبديل المتغيرين

∴ س = $\frac{٣ ص + ٣}{ص - ١}$

∴ س ص − س = ٢ ص + ٢

(س − ٢) ص = س + ٢ ∴ ص = $\frac{س + ٢}{س - ٢}$

∴ $د^{-1}$ (س) = $\frac{س + ٢}{س - ٢}$

∴ $د^{-1}$ (١) = −٣

⑤ ∵ د (س) = $\sqrt[3]{س - ٥}$ وبتبديل المتغيران

∴ س = $\sqrt[3]{ص - ٥}$

∴ ص = $س^{٣}$ + ٥

∴ $د^{-1}$ (س) = $س^{٣}$ + ٥

∴ (ر ∘ $د^{-1}$) (س) = ر ($د^{-1}$ (س))

= ر ($س^{٣}$ + ٥)

= ٢ ($س^{٣}$ + ٥) − ٧

= ٢ $س^{٣}$ + ٣

⑥ ∵ د (س) = ٢ س − ٤ وبتبديل المتغيران

∴ س = ٢ ص − ٤

∴ ص = $\frac{س + ٤}{٢}$ ∴ $د^{-1}$ (س) = $\frac{س + ٤}{٢}$

∴ $د^{-1}$ (س + ٢) = $\frac{س + ٢ + ٤}{٢}$ = $\frac{س + ٦}{٢}$

⑦ ∵ د (س) = $س^{٣}$ + ٣ $س^{٢}$ + ٣ س + ١

= ($س^{٣}$ + ١) + (٣ $س^{٢}$ + ٣ س)

= (س + ١) ($س^{٢}$ − س + ١) + ٣ س (س + ١)

= (س + ١) ($س^{٢}$ − س + ١ + ٣ س)

= (س + ١) ($س^{٢}$ + ٢ س + ١)

= (س + ١) $(س + ١)^{٢}$ = $(س + ١)^{٣}$

وبتبديل المتغيران

∴ س = $(ص + ١)^{٣}$ ∴ ص = $\sqrt[3]{س}$ − ١

∴ $د^{-1}$ (س) = $\sqrt[3]{س}$ − ١

⑧ ∵ منحنى $د^{-1}$ يمر بالنقطتين (−٢ ، ٠) ، (−٣ ، −٢)

∴ $د^{-1}$ (−٢) = ٠ ∴ د (٠) = −٢

، $د^{-1}$ (−٣) = −٢ ∴ د (−٢) = −٣

∴ (د ∘ د) (صفر) = د (د (صفر)) = د (−٢) = −٣

اجابات تمارين 10

1

① $٢^{٧}$ = ١٢٨ ② $(\frac{٢}{٥})^{٢} = \frac{٤}{٢٥}$

③ $(٢)^{\frac{٥}{٢}}$ = ٤ $\sqrt{٢}$

2

① $لو_{٥}$ ١ = صفر ② $لو_{١٠}$ ٠.٠٠٠١ = −٤

③ $لو_{٥} \frac{١}{١٢٥}$ = −٣

3

① بفرض $لو_{٢}$ ١٦ = س

∴ $٢^{س}$ = ١٦ ∴ $٢^{س} = ٢^{٤}$

∴ س = ٤ ∴ $لو_{٢}$ ١٦ = ٤

② بفرض $لو_{٨}$ ١ = س

∴ $٨^{س} = ١ = ٨^{٠}$ ∴ س = صفر

∴ $لو_{٨}$ ١ = صفر

③ بفرض لو ٠.٠٠٠٠١ = س

∴ $١٠^{س}$ = ٠.٠٠٠٠١ ∴ $١٠^{س} = \frac{١}{١٠٠٠٠٠}$

∴ $١٠^{س} = ١٠^{-٥}$ ∴ س = −٥

∴ لو ٠.٠٠٠٠١ = −٥

④ بفرض $لو_{\frac{١}{٢}}$ ١٢٨ = س

∴ $(\frac{١}{٢})^{س} = ١٢٨ = ٢^{٧}$

∴ $(\frac{١}{٢})^{س} = (\frac{١}{٢})^{-٧}$ ∴ س = −٧

∴ $لو_{\frac{١}{٢}}$ ١٢٨ = −٧

⑤ بفرض $لو_{٢} \frac{١}{٨}$ = س ∴ $٢^{س} = \frac{١}{٨}$

∴ $٢^{س} = ٢^{-٣}$ ∴ س = −٣

∴ $لو_{٢} \frac{١}{٨}$ = −٣

⑥ بفرض $لو_{\sqrt{٢}}$ ٨ $\sqrt{٢}$ = س

∴ $(\sqrt{٢})^{س}$ = ٨ $\sqrt{٢}$ = $(\sqrt{٢})^{٧}$

∴ س = ٧ ∴ $لو_{\sqrt{٢}}$ ٨ $\sqrt{٢}$ = ٧

⑦ بفرض $لو_{٣} \sqrt[4]{٢٧}$ = س

∴ $٣^{س} = \sqrt[4]{٢٧}$ ∴ $٣^{س} = (٣)^{\frac{٣}{٤}}$

∴ س = $\frac{٣}{٤}$ ∴ $لو_{٣} \sqrt[4]{٢٧} = \frac{٣}{٤}$

⑧ بفرض $لو_{٢}$ جا ٤٥° = $لو_{٢} \frac{١}{\sqrt{٢}}$ = س

∴ $٢^{س} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ $٢^{س} = ٢^{-\frac{١}{٢}}$

∴ س = $-\frac{١}{٢}$ ∴ $لو_{٢}$ جا ٤٥° = $-\frac{١}{٢}$

4

① $٢^{٧}$ = س ∴ س = ١٢٨

② $(\frac{١}{٣})^{-١}$ = س ∴ س = ٣

③ $٥^{-٢}$ = س ∴ س = $\frac{١}{٢٥}$

④ $٣^{٤} = س^{٢}$ ∴ ٨١ = $س^{٢}$ ∴ س = ± ٩

⑤ $(٨١)^{\frac{٣}{٤}}$ = س ∴ س = ٢٧

⑥ $٢^{-٥} = س^{-١}$ ∴ $\frac{١}{٢^{٥}} = \frac{١}{س}$ ∴ س = ٣٢

⑦ $(\frac{١}{٢})^{-٤} = ٢^{س}$ ∴ $٢^{س} = ٢^{٤}$ ∴ س = ٤

⑧ ٢ = $لو_{٣}$ س ∴ س = $٣^{٢}$ = ٩

⑨ $(٣)^{٠}$ = ٢ س − ٥ ∴ ١ = ٢ س − ٥

∴ س = ٣

⑩ $٦^{\frac{١}{٢}} = (س + ٤)^{\frac{١}{٢}}$ ∴ س + ٤ = ٦

∴ س = ٢

⑪ $٨^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[3]{س^{٢} + ٤٨}$ ∴ $٨^{٢} = س^{٢}$ + ٤٨

∴ $س^{٢}$ = ١٦ ∴ س = ± ٤

⑫ $لو_{٢}$ ($س^{٢}$ − ٢ س) = ٣

∴ $٢^{٣} = س^{٢}$ − ٢ س

∴ $س^{٢}$ − ٢ س − ٨ = ٠

∴ (س − ٤) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٤ أ، س = −٢

⑬ ٥ = | ٢ س + ١ |

∴ ٢ س + ١ = ٥ أ، ٢ س + ١ = −٥

∴ س = ٢ أ، س = −٣

⑭ $٢^{٤}$ = س (س + ٦)

∴ $س^{٢}$ + ٦ س − ١٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س + ٨) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = −٨

⑮ ٣ = $س^{٢}$ − ٢ س

∴ $س^{٢}$ − ٢ س − ٣ = ٠

∴ (س − ٣) (س + ١) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = −١

⑯ ($لو_{٣}$ س − ٤) ($لو_{٣}$ س − ٥) = ٠

∴ $لو_{٣}$ س = ٤ ومنها س = $٣^{٤}$ = ٨١

أ، $لو_{٣}$ س = ٥ ومنها س = $٣^{٥}$ = ٢٤٣

⑰ $٣^{لو_{٢} س} = ٩ = ٣^{٢}$ ∴ $لو_{٢}$ س = ٢

∴ س = $٢^{٢}$ = ٤

⑱ $٣^{س} - ٣^{س - ٢} = ٢^{٣}$

∴ $٣^{س - ٢} (٣^{٢} - ١) = ٨$ ∴ $٣^{س - ٢}$ = ١

∴ س − ٢ = ٠ ∴ س = ٢

⑲ $٢^{لو_{٤} (س + ١.٢٥)} = ٢^{-١}$

∴ $لو_{٤}$ (س + ١.٢٥) = −١

∴ $٤^{-١}$ = س + ١.٢٥ ∴ س = −١

(٢٠) لو$_{٢}$ س − ٢ = ± ٢

∴ لو$_{٢}$ س − ٢ = ٢ ومنها لو$_{٢}$ س = ٤

∴ س = ١٠^{٤} أ، لو$_{٢}$ س − ٢ = −٢

ومنها لو$_{٢}$ س = ٠ ∴ س = ١

٥

(١) س^{٣} = ١٢٥ = ٥^{٣} ∴ س = ٥

∴ مجموعة الحل = {٥}

(٢) س^{٥} = ٢ ∴ س = $\sqrt[٥]{٢}$

∴ مجموعة الحل = { $\sqrt[٥]{٢}$ }

(٣) س$^{-٢}$ = ٣ ∴ س^{٢} = $\frac{١}{٣}$

∴ س = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (ويرفض الحل السالب)

∴ مجموعة الحل = { $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ }

(٤) س$^{-\frac{٢}{٣}}$ = $\frac{١}{١٠٠}$

∴ س = (١٠$^{-٢}$)$^{-\frac{٣}{٢}}$ = ١٠٠٠

∴ مجموعة الحل = {١٠٠٠}

(٥) (− س)^{٤} = ٨١ = ٣^{٤}

∴ س = −٣ (ويرفض الحل الموجب)

∴ مجموعة الحل = {−٣}

(٦) (س − ١)^{٣} = ٢٧ = ٣^{٣} ∴ س − ١ = ٣

∴ س = ٤ ∴ مجموعة الحل = {٤}

(٧) (س − ١)^{٢} = ٧ − س

∴ س^{٢} − ٢ س + ١ = ٧ − س

∴ س^{٢} − س − ٦ = ٠

∴ (س + ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٢ (مرفوض) أ، س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

(٨) ($\frac{٢}{س}$)$^{-٣}$ = ٦٤ ∴ ($\frac{س}{٢}$)^{٣} = ٤^{٣}

∴ $\frac{س}{٢}$ = ٤ ∴ س = ٨

∴ مجموعة الحل = {٨}

(٩) س^{٢} = ٥ س ∴ س^{٢} − ٥ س = ٠

∴ س (س − ٥) = ٠ ∴ س = ٠ (مرفوض)

أ، س = ٥

∴ مجموعة الحل = {٥}

(١٠) س^{٤} = ٦٤ س ∴ س (س^{٣} − ٦٤) = ٠

∴ س = صفر (مرفوض) أ، س^{٣} = ٦٤

ومنها س = ٤

∴ مجموعة الحل = {٤}

(١١) س$^{٥ س}$ = س^{٦} ∴ ٥ س = ٦

∴ س = $\frac{٦}{٥}$ مع ملاحظة أن س ∈ ح$^{+}$ − {١}

∴ مجموعة الحل = { $\frac{٦}{٥}$ }

(١٢) لو$_{٣}$ لو$_{س}$ ٢٧ = ٣^{٠} = ١ ∴ لو$_{س}$ ٢٧ = ٣

∴ س^{٣} = ٢٧ = ٣^{٣} ∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

(١٣) س = س^{٢} − ١٢

∴ س^{٢} − س − ١٢ = ٠

∴ (س − ٤) (س + ٣) = ٠

∴ س = ٤ أ، س = −٣ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٤}

(١٤) س^{٢} = ٢ س + ٨

∴ س^{٢} − ٢ س − ٨ = ٠

∴ (س − ٤) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٤ أ، س = −٢ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٤}

(١٥) س = $\sqrt{س − ٢}$ + ٢

∴ $\sqrt{س − ٢}$ = س − ٢ وبتربيع الطرفين

∴ س − ٢ = س^{٢} − ٤ س + ٤

∴ س^{٢} − ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = ٢ أ، س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٢ ، ٣}

(١٦) (لو$_{٣}$ س)^{٢} − ٨ لو$_{٣}$ س + ١٥ = ٠

∴ (لو$_{٣}$ س − ٥) (لو$_{٣}$ س − ٣) = ٠

∴ لو$_{٣}$ س = ٥ أ، لو$_{٣}$ س = ٣

∴ س = ٣^{٥} = ٢٤٣ أ، س = ٣^{٣} = ٢٧

∴ مجموعة الحل = {٢٤٣ ، ٢٧}

(١٧) بفرض أن لو$_{٣}$ (س − ٢) = ك

∴ س − ٢ = ٣^{ك} (١)

، لو$_{٢٧}$ (س − ٢) = ص

∴ س − ٢ = ٢٧^{ص} = ٣$^{٣ ص}$ (٢)

، من (١) ، (٢) ينتج أن ٣ ص = ك

∴ ص + ٣ ص = ٤ ∴ ص = ١

∴ ك = ٣

أى أن لو$_{٣}$ (س − ٢) = ٣

∴ ٣^{٣} = س − ٢ ∴ س = ٢٩

∴ مجموعة الحل = {٢٩}

٦

(١) ($\frac{٥}{٢}$)^{س} = $\frac{١٦}{٦٢٥}$ = $\frac{٢^{٤}}{٥^{٤}}$ = ($\frac{٥}{٢}$)$^{-٤}$ ∴ س = −٤

(٢) ٤^{س} = ٨ $\sqrt{٢}$ ∴ ٢$^{٢ س}$ = ٢$^{\frac{٧}{٢}}$

∴ ٢ س = $\frac{٧}{٢}$ ∴ س = $\frac{٧}{٤}$

(٣) ($\sqrt{٥}$)$^{س^{٢}}$ = ١٢٥ $\sqrt{٥}$ = ($\sqrt{٥}$)^{٩}

∴ س^{٢} = ٩ ∴ س = ± ٣

(٤) (١٠)$^{٣ س + ١}$ = $\frac{١}{١٠٠}$ = (١٠)$^{-٢}$

∴ ٣ س + ١ = −٢ ∴ س = −١

(٥) (٠.٣)$^{س^{-٢}}$ = ٠.٠٩ = (٠.٣)^{٢}

∴ س$^{-٢}$ = ٢ ∴ س^{٢} = $\frac{١}{٢}$

∴ س = ± $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

(٦) ٣^{س} = لو$_{٢}$ ٨ ∴ ٢$^{٣^{س}}$ = ٨ = ٢^{٣}

∴ ٣^{س} = ٣ ∴ س = ١

(٧) لو$_{٢}$ (٢^{س} − ٤) = ٥ − س

∴ ٢$^{٥ − س}$ = ٢^{س} − ٤ بالضرب × ٢^{س}

∴ ٢^{٥} = ٢$^{٢ س}$ − ٤ × ٢^{س}

∴ ٢$^{٢ س}$ − ٤ × ٢^{س} − ٣٢ = ٠

∴ (٢^{س} − ٨) (٢^{س} + ٤) = ٠

∴ ٢^{س} = ٨ أ، ٢^{س} = −٤ (مرفوض)

∴ ٢^{س} = ٢^{٣} ∴ س = ٣

(٨) ٤^{٢} = ١٢ + لو$_{٢}$ (س − ١)

∴ لو$_{٢}$ (س − ١) = ٣ ∴ ٢^{٣} = س − ١

∴ س = ٩

(٩) ٢ = $\frac{س^{٢}}{٢ س − ٣}$ ∴ س^{٢} − ٦ س + ٩ = ٠

∴ (س − ٣)^{٢} = ٠ ∴ س = ٣

٧

(١) (ب) (٢) (ب) (٣) (جـ)

(٤) (جـ) (٥) (ب) (٦) (ب)

٨

(١) ٠.٤٩٨٣ (٢) ٤.٧٥٤٩ (٣) −٢.١٨٩٣

٩

① ١٫٧١٥٩　② ٢٥٫٨٢٢٦　③ ٠٫٠٥٠١٢

١٠

① ∵ لو$_{س}$ ١٦ = ص　∴ س^{ص} = ١٦

وبالتعويض في المعادلة الأولى

∴ ١٦ = ٥ س − ٤　∴ س = ٤

∴ لو$_{٤}$ ١٦ = ص　∴ ٤^{ص} = ١٦ = ٤^{٢}

∴ ص = ٢

∴ مجموعة الحل = {(٤ ، ٢)}

② ∵ لو$_{ص}$ ٩ = ١　∴ ص = ٩

∴ لو$_{س}$ لو$_{٢}$ لو$_{س}$ ٩ = ٠

∴ لو$_{٢}$ لو$_{س}$ ٩ = س^{٠} = ١　∴ لو$_{س}$ ٩ = ٢

∴ س^{٢} = ٩ ∴ س = ٣ (ويرفض الحل السالب)

∴ مجموعة الحل = {(٣ ، ٩)}

١١

∵ لو$_{٧}$ ٤٩ = ٢　∴ (١٦)^{٢} = ٤٩

∴ (٤^{٢})^{٢} = ٧^{٢}　∴ (٤^{٢})^{٢} = ٧^{٢}

∴ ٤^{٢} = ٧

، ∵ لو$_{٧}$ ٢٫٥ = ب　∴ ٧^{ب} = ٢٫٥

∴ ٤$^{٢ب+١}$ = ٤^{٢ب} × ٤ = (٤^{٢})^{ب} × ٤ = ٧^{ب} × ٤

= ٢٫٥ × ٤ = ١٠

١٢

① ٢ س + ١ > ٠　∴ س > −$\frac{١}{٢}$

∴ مجال الدالة =]−$\frac{١}{٢}$ ، ∞[

② س > ٠　∴ مجال الدالة =]٠ ، ∞[

③ الدالة معرفة لجميع قيم س التي

تحقق أن [س > ٠ ، س ≠ ١]

أي أن : مجال الدالة =]٠ ، ∞[− {١}

④ الدالة معرفة لجميع قيم س التي تحقق أن

[س > ٠ ، س − ٢ > ٠ ، س − ٢ ≠ ١]　أي أن [س > ٠ ، س > ٢ ، س ≠ ٣]

أي أن : مجال الدالة =]٢ ، ∞[− {٣}

⑤ الدالة معرفة لجميع قيم س التي تحقق أن

[س > ٠ ، ٢ − س > ٠ ، ٢ − س ≠ ١]　أي أن [س > ٠ ، س < ٢ ، س ≠ ١]

أي أن : مجال الدالة =]٠ ، ٢[− {١}

⑥ الدالة معرفة لجميع قيم س التي تحقق

[س − ٣ > ٠ ، ٥ − س > ٠ ، ٥ − س ≠ ١]　أي أن [س > ٣ ، س < ٥ ، س ≠ ٤]

أي أن : مجال الدالة =]٣ ، ٥[− {٤}

⑦ الدالة معرفة لجميع قيم س التي تحقق

[س^{٢} > ٠ ، س − ٣ > ٠ ، س − ٣ ≠ ١]　أي أن [س^{٢} > ٠ ، س > ٣ ، س ≠ ٤]

أي أن : مجال الدالة =]٣ ، ∞[− {٤}

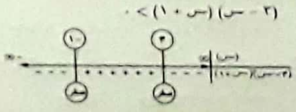
⑧ الدالة معرفة لجميع قيم س التي تحقق

[٢ س + ١ > ٠ ، س + ٢ > ٠ ، س + ٢ ≠ ١]　أي أن [س > −$\frac{١}{٢}$ ، س > −٢ ، س ≠ −١]

أي أن : مجال الدالة =]−$\frac{١}{٢}$ ، ∞[

⑨ الدالة معرفة لجميع قيم س التي تحقق

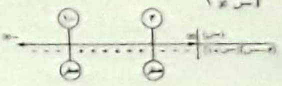
(٣ − س) (س + ١) > ٠



أي أن : مجال الدالة =]−١ ، ٣[

⑩ الدالة معرفة لجميع قيم س التي تحقق

[(٣ − س) (س + ١) > ٠ ، س > ٠ ، س ≠ ١]



أي أن : مجال الدالة =]٠ ، ٣[− {١}

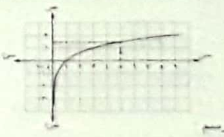
١٣

∵ منحنى الدالة يمر بالنقطة (٨١ ، ٤)

∴ ٤ = لو$_{أ}$ ٨١　∴ أ^{٤} = ٨١

∴ أ = ٣　(ويرفض الحل السالب)

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
د (س)	−٢	−١	٠	١	٢



من الرسم

المجال = ح$^{+}$ ، المدى = ح

والدالة تزايدية على مجالها

، نقطة التقاطع مع محور السينات (١ ، ٠)

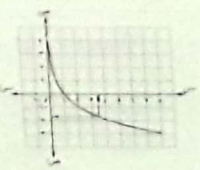
، لو$_{٣}$ ٥ = ١٫٥

١٤

∵ منحنى الدالة يمر بالنقطة ($\frac{١}{٨}$ ، ٣)

∴ ٣ = لو$_{أ}$ $\frac{١}{٨}$　∴ أ^{٣} = $\frac{١}{٨}$　∴ أ = $\frac{١}{٢}$

س	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤
د (س)	٢	١	٠	−١	−٢



من الرسم

المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها

، نقطة التقاطع مع محور السينات = (١ ، ٠)

، لو$_{\frac{١}{٢}}$ ٣ = −١٫٨

١٥

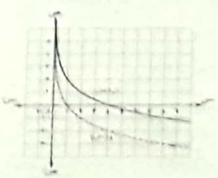
① (ب)　② (ﺟ)　③ (ﺟ)　④ (ب)

⑤ (ﺟ)　⑥ (أ)　⑦ (ب)　⑧ (أ)

⑨ (ﺟ)　⑩ (ﺟ)　⑪ (د)

١٦

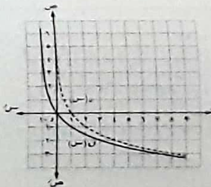
① منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة رأسية قدرها ٢ وحدة في اتجاه و ص



من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[

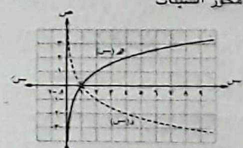
، المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها.

② منحنى الدالة ن هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية قدرها وحدة واحدة في اتجاه و س



من الرسم : المجال =]−١ ، ∞[
، المدى = ح
، الدالة تناقصية على مجالها.

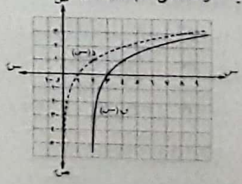
③ منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د بالانعكاس فى محور السينات



من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[، المدى = ح
، الدالة تزايدية على مجالها.

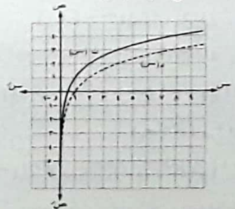
١٧

① منحنى الدالة ن هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة أفقية ٢ وحدة فى اتجاه و س



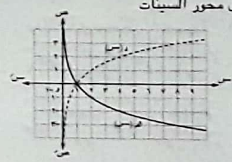
من الرسم : المجال =]٢ ، ∞[
، المدى ح ، الدالة تزايدية على مجالها.

② منحنى الدالة ت هو نفس منحنى الدالة د بإزاحة وحدة واحدة فى اتجاه و ص



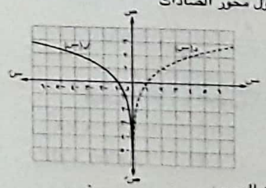
من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[
، المدى = ح ، الدالة تزايدية على مجالها.

③ منحنى الدالة هـ هو نفس منحنى الدالة د بانعكاس حول محور السينات



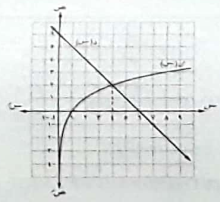
من الرسم : المجال =]٠ ، ∞[
، المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها.

④ منحنى الدالة ر هو نفس منحنى الدالة د بانعكاس حول محور الصادات



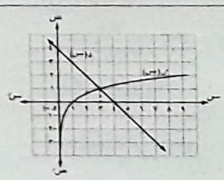
من الرسم :
، المجال =]−∞ ، ٠[
، المدى = ح ، الدالة تناقصية على مجالها.

١٨



من الرسم نجد أن مجموعة الحل = {٤}

١٩



من الرسم نجد أن مجموعة الحل = {٣}

٢٠

① (ب) ② (د) ③ (أ) ④ (ب)
⑤ (جـ) ⑥ (أ) ⑦ (ب) ⑧ (د)

إرشادات لحل رقم ٢٠

① ∵ د$^{-1}$ (٥) = ١٤ ∴ د (١٤) = ٥
∴ لو$_{أ}$ (٢ × ١٤ + ٤) = ٥
∴ أ^{٥} = ٣٢ ∴ أ = ٢

② ∵ د$^{-1}$ (أ + ٣) = ٣٢
∴ د (٣٢) = أ + ٣ ∴ لو$_{٤}$ ٣٢ = أ + ٣
∴ ٤$^{أ + ٣}$ = ٣٢ ∴ ٢$^{٢أ + ٦}$ = ٢^{٥}
∴ ٢أ + ٦ = ٥ ∴ أ = −$\frac{١}{٢}$

③ (د ∘ ر) (١٠) = د (ر (١٠))
= د (٧) = لو$_{٢}$ ٨ = ٣

④ ∵ لو (س − ٥) > صفر
∴ س − ٥ > ١ ∴ س > ٦

⑤ ∵ لو$_{٣}$ لو$_{٢}$ | |س − ١| + ٥ | = ١
∴ لو$_{٢}$ | |س − ١| + ٥ | = ٣
∴ | |س − ١| + ٥ | = ٨
∴ |س − ١| + ٥ = ± ٨
∴ |س − ١| = −١٣ (مرفوض)
أ، |س − ١| = ٣
∴ س − ١ = ± ٣ ∴ س = ١ ± ٣
∴ س = ٤ أ، س = −٢
∴ مجموعة الحل = {−٢ ، ٤}

⑥ ∵ منحنى الدالة يمر بالنقطتين
(١١ ، ٣) ، (٤ ، ٠)
∴ د (٤) = صفر ∴ لو$_{أ}$ (٤ + ب) = صفر
∴ ٤ + ب = ١ ∴ ب = −٣
، د (١١) = ٣ ∴ لو$_{أ}$ (١١ + ب) = ٣
∴ ١١ + ب = أ^{٣} ∴ أ^{٣} = ٨ ∴ أ = ٢
∴ د (س) = لو$_{٢}$ (س − ٣)
∴ د (٧) = لو$_{٢}$ (٧ − ٣) = ٢ ، د$^{-1}$ (٢) = ٧
∴ د (٧) + د$^{-1}$ (٢) = ٩

⑦ لايجاد مجال الدالة د (س) = لو |س^{٢} − ٩|
نضع |س^{٢} − ٩| > ٠
أى أن |(س − ٣) (س + ٣)| > ٠
س ∈ ح − {٣ ، −٣}
∴ مجال الدالة د = ح − {٣ ، −٣}

⑧ لإيجاد مجال الدالة د (س) = $\frac{\text{لو}_{٥} (س + ٣)}{س^{٢} + ٣ س + ٢}$
= $\frac{\text{لو}_{٥} (س + ٣)}{(س + ١) (س + ٢)}$
∴ س + ٣ > ٠ ∴ س > −٣
، س ≠ −١ ، س ≠ −٢
∴ المجال =]−٣ ، ∞[− {−١ ، −٢}

إجابات تمارين 11

١

(١) لو ٢ + لو ٥ = لو (٢ × ٥) = لو ١٠ = ١

(٢) لو$_{٥}$ ١٥ − لو$_{٥}$ ٣ = لو$_{٥}$ $\frac{١٥}{٣}$ = لو$_{٥}$ ٥ = ١

(٣) لو$_{٢}$ ٥ × لو$_{٥}$ ٢ = $\frac{\text{لو } ٥}{\text{لو } ٢} \times \frac{\text{لو } ٢}{\text{لو } ٥}$ = ١

(٤) لو$_{٣}$ ٨١ × لو$_{٩}$ ٣ = لو$_{٣}$ $٣^{٤}$ × لو$_{٩}$ $٩^{\frac{١}{٢}}$ = ٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٢

(٥) لو$_{٢}$ $\frac{١٤ \times ١٥}{١٠٥}$ = لو$_{٢}$ ٢ = ١

(٦) لو ٥٤ − ٣ لو ٣ − لو ٢

= لو ٥٤ − لو ٢٧ − لو ٢ = لو $\frac{٥٤}{٢٧ \times ٢}$ = لو ١ = صفر

(٧) لو$_{٤}$ لو$_{٢}$ لو$_{٢}$ $٢^{٢}$ = لو$_{٤}$ لو$_{٢}$ ٢ = لو$_{٤}$ ١ = صفر

(٨) ١ + لو ٣ − لو ٢ − لو ١٥

= ١ + لو $\left(\frac{٣}{١٥ \times ٢}\right)$ = ١ + لو $\frac{١}{١٠}$

= ١ + لو $(١٠)^{-١}$ = ١ − ١ = صفر

(٩) لو ٠,٠٠٩ − لو $\frac{٢٧}{١٦}$ + لو ١٥$\frac{٥}{٨}$ − لو $\frac{١}{١٢}$

= لو (٠,٠٠٩ × $\frac{١٦}{٢٧}$ × ١٥$\frac{٥}{٨}$ × ١٢)

= لو ١ = صفر

(١٠) لو$_{١٠٠}$ $\frac{٧}{١٧٠}$ − لو$_{١٠٠}$ $\frac{٣٥}{١٨}$ + لو$_{١٠٠}$ $\frac{١٧}{٣٦}$

= لو$_{١٠٠}$ ($\frac{٧}{١٧٠}$ × $\frac{١٨}{٣٥}$ × $\frac{١٧}{٣٦}$)

= لو$_{١٠٠}$ $\frac{١}{١٠٠}$ = لو$_{١٠٠}$ $(١٠٠)^{-١}$ = −١

(١١) ٢ لو ٢٥ + لو ($\frac{١}{٣}$ + $\frac{١}{٥}$) + ٢ لو ٣ − لو ٣٠

= لو ٦٢٥ + لو $\frac{٨}{١٥}$ + لو ٩ − لو ٣٠

= لو (٦٢٥ × $\frac{٨}{١٥}$ × ٩ × $\frac{١}{٣٠}$) = لو ١٠٠ = ٢

(١٢) لو ٢٥ + $\frac{\text{لو } ٨ \times \text{لو } ١٦}{\text{لو } ٦٤}$ = لو ٢٥ + $\frac{٣ \text{ لو } ٢ \times ٤ \text{ لو } ٢}{٦ \text{ لو } ٢}$

= لو ٢٥ + ٢ لو ٢

= لو ٢٥ + لو ٤

= لو (٢٥ × ٤)

= لو ١٠٠ = ٢

(١٣) $\frac{\text{لو}_{٢} ٢٥ + \text{لو}_{٢} ٤}{\text{لو}_{٢} ٣٠ - \text{لو}_{٢} ٣}$ = $\frac{\text{لو}_{٢} (٢٥ \times ٤)}{\text{لو}_{٢} \frac{٣٠}{٣}}$

= $\frac{\text{لو}_{٢} ١٠٠}{\text{لو}_{٢} ١٠}$ = $\frac{٢ \text{ لو}_{٢} ١٠}{\text{لو}_{٢} ١٠}$ = ٢

(١٤) $\frac{(\text{لو } ٣)^{٢} - \text{لو } ٣^{٢}}{\text{لو } ٣ - \text{لو } ١٠٠}$ = $\frac{(\text{لو } ٣)^{٢} - ٢ \text{ لو } ٣}{\text{لو } ٣ - ٢ \text{ لو } ١٠}$

= $\frac{\text{لو } ٣ \, (\text{لو } ٣ - ٢)}{(\text{لو } ٣ - ٢)}$ = لو ٣

(١٥) لو$_{٥}$ $\frac{\text{لو}_{٣} ٣ - \text{لو}_{٣} ٢}{\text{لو}_{٣} \left(\frac{٣}{٢}\right)^{٥}}$ = لو$_{٥}$ $\frac{\text{لو}_{٣} \frac{٣}{٢}}{٥ \text{ لو}_{٣} \frac{٣}{٢}}$ = لو$_{٥}$ $\frac{١}{٥}$ = −١

(١٦) لو$_{٣}$ $\frac{\text{لو س}^{١٨}}{\text{لو س}^{٢}}$ = لو$_{٣}$ $\frac{١٨ \text{ لو س}}{٢ \text{ لو س}}$ = لو$_{٣}$ ٩ = ٢

(١٧) لو$_{\text{أبجـ}}$ أ + لو$_{\text{أبجـ}}$ ب + لو$_{\text{أبجـ}}$ جـ

= لو$_{\text{أبجـ}}$ أبجـ = ١

(١٨) $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ أ + $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ ب + ٢ لو$_{٣}$ جـ

− لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{أب}}$ − لو$_{٣}$ ٣ $\text{جـ}^{٢}$

= لو$_{٣}$ $\text{أ}^{\frac{١}{٢}}$ + لو$_{٣}$ $\text{ب}^{\frac{١}{٢}}$ + لو$_{٣}$ $\text{جـ}^{٢}$ − لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{أب}}$

− (لو$_{٣}$ ٣ + لو$_{٣}$ $\text{جـ}^{٢}$)

= لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{أ}}$ + لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{ب}}$ + لو$_{٣}$ $\text{جـ}^{٢}$ − لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{أب}}$

− لو$_{٣}$ ٣ − لو$_{٣}$ $\text{جـ}^{٢}$

= لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{أب}}$ − لو$_{٣}$ $\sqrt{\text{أب}}$ − ١ = −١

(١٩) $\frac{١}{\text{لو}_{٢} ١٢} + \frac{١}{\text{لو}_{٨} ١٢} + \frac{١}{\text{لو}_{٩} ١٢}$

= لو$_{١٢}$ ٢ + لو$_{١٢}$ ٨ + لو$_{١٢}$ ٩

= لو$_{١٢}$ (٢ × ٨ × ٩) = لو$_{١٢}$ ١٤٤ = لو$_{١٢}$ $(١٢)^{٢}$

= ٢ لو$_{١٢}$ (١٢) = ٢

٢

(١) الطرف الأيمن = لو$_{٣}$ $\frac{(١٥)^{٢} \times ٧}{٣ \times ١٧٥}$ = لو$_{٣}$ ٣

= لو$_{٣}$ $\left(\sqrt{٣}\right)^{٢}$ = ٢ لو$_{٣}$ $\sqrt{٣}$

(٢) الطرف الأيمن = لو$_{٢}$ $\frac{٢٩٧ \times ٣}{٩٨ \times ١١}$ − ٢ لو$_{٢}$ $\frac{٩}{٧}$

= لو$_{٢}$ $\frac{٣ \times ٢٩٧ \times ٧^{٢}}{١١ \times ٩٨ \times ٩^{٢}}$ = لو$_{٢}$ $\frac{١}{٢}$ = −١

(٣) الطرف الأيمن = (لو ١٠ − لو ٥) (لو ١٠٠ − لو ٢٥)

= (لو $\frac{١٠}{٥}$) (لو $\frac{١٠٠}{٢٥}$) = (لو ٢) (لو ٤)

= (لو ٢) (٢ لو ٢) = ٢ $(\text{لو } ٢)^{٢}$

(٤) الطرف الأيمن = $\frac{\text{لو } ٣^{٦} - \text{لو } ٢^{٦}}{\text{لو } ٣^{٢} - \text{لو } ٢^{٢}}$ = $\frac{٦ \text{ لو } ٣ - ٦ \text{ لو } ٢}{٢ \text{ لو } ٣ - ٢ \text{ لو } ٢}$

= $\frac{٦ \, (\text{لو } ٣ - \text{لو } ٢)}{٢ \, (\text{لو } ٣ - \text{لو } ٢)}$ = ٣

(٥) الطرف الأيمن = $\frac{(\text{لو } ٥)^{٢} - ٢ \text{ لو } ٥}{\text{لو } ٥ - ٢}$

= $\frac{(\text{لو } ٥)(\text{لو } ٥ - ٢)}{\text{لو } ٥ - ٢}$ = لو ٥

، الطرف الأيسر = لو ١٠ − لو ٢ = لو $\frac{١٠}{٢}$ = لو ٥

∴ الطرفان متساويان.

(٦) الطرف الأيمن = $\frac{\text{لو}_{٣} \text{لو}_{٥} \text{لو}_{٣} ٣^{٥}}{\text{لو}_{٥} \text{لو}_{٣} \text{لو}_{٢} ٢^{٩}}$ = $\frac{\text{لو}_{٣} \text{لو}_{٥} ٥}{\text{لو}_{٥} \text{لو}_{٣} ٩}$

= $\frac{\text{لو}_{٣} ١}{\text{لو}_{٥} ٢}$ = صفر

٣

(١) س لو ٥ = لو ١٣ ∴ س = $\frac{\text{لو } ١٣}{\text{لو } ٥}$ ≃ ١,٥٩

(٢) (س + ٢) لو ٣ = لو ٦

∴ س = $\frac{\text{لو } ٦ - ٢ \text{ لو } ٣}{\text{لو } ٣}$ ≃ −٠,٣٧

(٣) (٧ − ٢ س) لو ٣ = لو ١٢,١

∴ س = $\frac{٧ \text{ لو } ٣ - \text{لو } ١٢,١}{٢ \text{ لو } ٣}$ ≃ ٢,٣٦

(٤) (س + ١) لو ٧ = (س − ٢) لو ٣

∴ س (لو ٧ − لو ٣) = −٢ لو ٣ − لو ٧

∴ س = $\frac{-٢ \text{ لو } ٣ - \text{لو } ٧}{\text{لو } ٧ - \text{لو } ٣}$ ≃ −٤,٨٩

(٥) (٢ س − ٣) لو ٣ = (١ − س) لو ١١

∴ س (٢ لو ٣ + لو ١١) = ٣ لو ٣ + لو ١١

∴ س = $\frac{٣ \text{ لو } ٣ + \text{لو } ١١}{٢ \text{ لو } ٣ + \text{لو } ١١}$ ≃ ١,٢٤

(٦) $\text{س}^{\frac{٨}{٥}}$ = ٩٤,٥ ∴ $\frac{٨}{٥}$ لو |س| = لو ٩٤,٥

∴ لو |س| = $\frac{\text{لو } ٩٤,٥}{\frac{٨}{٥}}$

∴ |س| = $(١٠)^{\frac{٥ \text{ لو } ٩٤,٥}{٨}}$ ≃ ١٧,١٧

∴ س = ± ١٧,١٧

(٧) $١٠^{٢\text{س}}$ = $\frac{٥}{٧}$ ∴ ٢ س لو ١٠ = لو $\frac{٥}{٧}$

∴ ٢ س = لو $\frac{٥}{٧}$ ∴ س = $\frac{١}{٢}$ لو $\frac{٥}{٧}$ ≃ −٠,٠٧

(٨) $٧^{\text{س}-١}$ $(٧^{٢} + ١)$ = ٣٠٠

∴ $٧^{\text{س}-١}$ = ٦ ∴ (س − ١) لو ٧ = لو ٦

∴ س = $\frac{\text{لو } ٦ + \text{لو } ٧}{\text{لو } ٧}$ ≃ ١,٩٢

(٩) بالقسمة على $٢^{\text{س}+١}$

∴ $\left(\frac{٢}{٣}\right)^{\text{س}}$ = ٢ × ٣ ∴ س لو $\frac{٢}{٣}$ = لو ٦

∴ س = $\frac{\text{لو } ٦}{\text{لو } \frac{٢}{٣}}$ ≃ −٤,٤٢

⑩ لو ٣ + (س − ١١) لو ٢ = لو ٨ + (٥ س − ١) لو ٦

∴ س (لو ٢ − ٥ لو ٦) = لو ٨ − لو ٣ + ١١ لو ٢ − لو ٦

∴ س = $\frac{\text{لو ٨ − لو ٣ + ١١ لو ٢ − لو ٦}}{\text{لو ٢ − ٥ لو ٦}}$ ≃ −٠.٨٢

⑪ ٥$^{\text{٢س}}$ − ٢٧ × ٥$^{\text{س}}$ + ٥٠ = ٠

∴ (٥$^{\text{س}}$ − ٢٥) (٥$^{\text{س}}$ − ٢) = ٠

∴ إما ٥$^{\text{س}}$ = ٥^{٢} ∴ س = ٢

أ، ٥$^{\text{س}}$ = ٢ ∴ س لو ٥ = لو ٢

∴ س = $\frac{\text{لو ٢}}{\text{لو ٥}}$ = ٠.٤٣

∴ س = ٢ أ، ٠.٤٣

⑫ (٣ − ٥ س) لو ٨ − (٤ + س) لو ٧ = لو ٢

∴ س (−٥ لو ٨ − لو ٧) = لو ٢ − ٣ لو ٨ + ٤ لو ٧

∴ س = $\frac{\text{لو ٢ − ٣ لو ٨ + ٤ لو ٧}}{\text{−٥ لو ٨ − لو ٧}}$ ≃ −٠.١٨

⑬ لو$_{٥}$ (٤$^{\text{س + ١}}$) = س − ٢

∴ ٤$^{\text{س + ١}}$ = ٥$^{\text{س − ٢}}$

∴ (س + ١) لو ٤ = (س − ٢) لو ٥

∴ س لو ٤ + لو ٤ = س لو ٥ − ٢ لو ٥

∴ س (لو ٤ − لو ٥) = − لو ٤ − ٢ لو ٥

∴ س = $\frac{\text{لو ٤ + ٢ لو ٥}}{\text{لو ٥ − لو ٤}}$ = ٢٠.٦٤

٤

① لو$_{٣}$ ١٥ = لو$_{٣}$ ٥ + لو$_{٣}$ ٣ = ١.٤٦٥ + ١ = ٢.٤٦٥

② لو$_{٣}$ ١٣٥ = لو$_{٣}$ ٢٧ + لو$_{٣}$ ٥ = ٣ لو$_{٣}$ ٣ + لو$_{٣}$ ٥

= ٣ + ١.٤٦٥ = ٤.٤٦٥

③ لو$_{٣}$ $\frac{٥}{٩}$ = لو$_{٣}$ ٥ − لو$_{٣}$ ٩ = لو$_{٣}$ ٥ − ٢ لو$_{٣}$ ٣

= ١.٤٦٥ − ٢ = −٠.٥٣٥

٥

① لو ٦ = لو ٢ + لو ٣ = س + ص

② لو$_{١٨}$ ١٢ = $\frac{\text{لو ١٢}}{\text{لو ١٨}}$ = $\frac{\text{لو ٤ + لو ٣}}{\text{لو ٢ + لو ٩}}$

= $\frac{\text{٢ لو ٢ + لو ٣}}{\text{لو ٢ + ٢ لو ٣}}$ = $\frac{\text{٢ س + ص}}{\text{س + ٢ ص}}$

٦

① (✗) والتصحيح: لو$_{\text{س}}$ س$^{\text{س}}$ = س

لكل س ∈ ح$^{+}$ − {١}

② (✗) والتصحيح: لو س$^{\text{ن}}$ = ن لو س لكل س ∈ ح$^{+}$

③ (✗) والتصحيح: لو$_{\text{م}}$ س ص = لو$_{\text{م}}$ س + لو$_{\text{م}}$ ص

④ (✗) والتصحيح: لو$_{\text{م}}$ س ص = لو$_{\text{م}}$ س + لو$_{\text{م}}$ ص

⑤ (✓)

⑥ (✓) ⑦ (✓)

⑧ (✗) والتصحيح: لو$_{\text{م}}$ س^{٤} = ٤ لو$_{\text{م}}$ |س|

٧

① (أ) ② (جـ) ③ (د) ④ (جـ) ⑤ (ب)

⑥ (جـ) ⑦ (جـ) ⑧ (ب) ⑨ (د)

٨

① لو$_{٣}$ (س + ٦) = لو$_{٣}$ س^{٢} ∴ س + ٦ = س^{٢}

∴ س^{٢} − س − ٦ = ٠

∴ (س + ٢) (س − ٣) = ٠

∴ س = −٢ (مرفوض) أ، س = ٣

∴ م.ح = {٣}

② لو$_{٤}$ س (س + ٦) = ٣

∴ ٤^{٣} = س^{٢} + ٦ س

∴ س^{٢} + ٦ س − ٦٤ = ٠

∴ س = −٣ + √٧٣

أ، س = −٣ − √٧٣ (مرفوض)

∴ م.ح = {−٣ + √٧٣}

③ لو$_{٣}$ س^{٢} = ٢ ∴ ٢ لو$_{٣}$ س = ٢

∴ لو$_{٣}$ س = ١ ∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

④ لو$_{٣}$ (س − ١) (س + ١) = لو$_{٣}$ ٨

∴ س^{٢} − ١ = ٨

∴ س^{٢} = ٩ ∴ س = ٣

أ، س = −٣ (مرفوض) ∴ م.ح = {٣}

⑤ لو $\frac{\text{س + ٨}}{\text{س − ١}}$ = ١ ∴ $\frac{\text{س + ٨}}{\text{س − ١}}$ = ١٠

∴ ١٠ س − ١٠ = س + ٨

∴ ٩ س = ١٨ ∴ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

⑥ لو$_{٤}$ س = لو$_{٤}$ ٤ − لو$_{٤}$ (س − ٣)

∴ لو$_{٤}$ س = لو$_{٤}$ $\frac{٤}{\text{س − ٣}}$ ∴ س = $\frac{٤}{\text{س − ٣}}$

∴ س^{٢} − ٣ س − ٤ = ٠

∴ (س + ١) (س − ٤) = ٠

∴ س = −١ (مرفوض) أ، س = ٤

∴ م.ح = {٤}

⑦ لو$_{٥}$ ٢ س^{٢} = لو$_{٥}$ ١٨ ∴ ٢ س^{٢} = ١٨

∴ س^{٢} = ٩ ∴ س = ± ٣

∴ مجموعة الحل = {٣ ، −٣}

⑧ لو$_{٣}$ (٧ س^{٢} − ٤) = لو$_{٣}$ (س^{٢} × ٣)

∴ ٧ س^{٢} − ٤ = ٣ س^{٢} ∴ ٤ س^{٢} = ٤

∴ س = ١ أ، س = −١ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {١}

⑨ لو$_{٣}$ $\frac{\text{(س + ٢)}^{٥}}{\text{(س − ١)}^{٥}}$ = لو$_{٣}$ ٢^{٥} ∴ $\frac{\text{س + ٢}}{\text{س − ١}}$ = ٢

∴ س + ٢ = ٢ س − ٢ ∴ س = ٤

∴ مجموعة الحل = {٤}

⑩ لو (٨ − س) (س − ٦) = ٠

∴ ١٤ س − س^{٢} − ٤٨ = ١

∴ س^{٢} − ١٤ س + ٤٩ = ٠

∴ (س − ٧)^{٢} = ٠ ∴ س = ٧

∴ م.ح = {٧}

⑪ لو (س + ٢) (س − ٢) = لو ١٠ − لو ٢

∴ لو (س^{٢} − ٤) = لو $\frac{١٠}{٢}$ = لو ٥

∴ س^{٢} − ٤ = ٥ ∴ س^{٢} = ٩

∴ س = ٣ (والسالب مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٣}

⑫ لو ٧ × لو ٣^{٦} = لو ٧^{٢} × لو س^{٣}

∴ ٦ لو ٧ لو ٣ = ٦ لو ٧ لو س

∴ لو ٣ = لو س ∴ س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

⑬ لو$_{٢}$ $\frac{\text{س}^{٢}\text{ + ٦ س + ٩}}{\text{س − ١}}$ = لو$_{٥}$ ٥^{٤} = ٤

∴ $\frac{\text{س}^{٢}\text{ + ٦ س + ٩}}{\text{س − ١}}$ = ٢^{٤} = ١٦

∴ س^{٢} − ١٠ س + ٢٥ = ٠

∴ (س − ٥)^{٢} = صفر

∴ س = ٥ ∴ مجموعة الحل = {٥}

⑭ لو س = $\frac{\text{(لو ٣)}^{٢}\text{ − ٣ لو ٣}}{\text{لو ٣ − لو ١٠٠٠}}$ = $\frac{\text{لو ٣ (لو ٣ − ٣)}}{\text{لو ٣ − ٣}}$ = لو ٣

∴ س = ٣ ∴ مجموعة الحل = {٣}

⑮ (لو س)^{٢} − لو س^{٢} − ٣ = ٠

∴ (لو س)^{٢} − ٢ لو س − ٣ = ٠

∴ (لو س + ١) (لو س − ٣) = ٠

∴ لو س = −١ أ، لو س = ٣

∴ س = ٠.١ أ، س = ١٠٠٠

∴ م.ح = {٠.١ ، ١٠٠٠}

⑯ (لو س)^{٢} + ٢ لو س + ١ = (لو ٥)^{٢}

∴ (لو س + ١)^{٢} = (لو ٥)^{٢}

∴ لو س + ١ = ± لو ٥

∴ لو س = لو ٥ − ١ = لو ٥ − لو ١٠ = لو $\frac{١}{٢}$

∴ س = $\frac{١}{٢}$

أ، لو س = - لو ٥ - ١ = - لو ٥ - لو ١٠

= - لو ٥٠ = لو $(\text{٥٠})^{-\text{١}}$

∴ س = $\frac{\text{١}}{\text{٥٠}}$

∴ مجموعة الحل = { $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ، $\frac{\text{١}}{\text{٥٠}}$ }

⑰ $\text{لو}_{\text{س}}$ $\frac{\text{١٤} \times \text{٤}}{\text{٢٧}}$ = ٣ $\text{لو}_{\text{س}}$ س + $\text{لو}_{\text{س}}$ ٧

= $\text{لو}_{\text{س}}$ ($\text{س}^{\text{٣}}$ × ٧)

∴ ٧ $\text{س}^{\text{٣}}$ = $\frac{\text{٥٦}}{\text{٢٧}}$ ∴ $\text{س}^{\text{٣}}$ = $\frac{\text{٨}}{\text{٢٧}}$

∴ س = $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$

∴ مجموعة الحل = { $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ }

⑱ لو ($\sqrt{\text{٣س - ١}}$ × $\sqrt{\text{س - ٢}}$) = لو ٢٠ - لو ١٠

∴ لو $\sqrt{(\text{٣س - ١})(\text{س - ٢})}$ = لو ٢

∴ $\sqrt{(\text{٣س - ١})(\text{س - ٢})}$ = ٢

∴ (٣س - ١) (س - ٢) = $\text{٢}^{\text{٢}}$

∴ ٣ $\text{س}^{\text{٢}}$ - ٧ س - ٦ = ٠

∴ (٣ س + ٢) (س - ٣) = ٠

∴ س = - $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ (مرفوض) أ، س = ٣

∴ مجموعة الحل = {٣}

٩

① $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}}$ = $\frac{\text{لو ٩}}{\text{لو ٤}}$ ∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}}$ = $\frac{\text{٢ لو ٣}}{\text{٢ لو ٢}}$

∴ لو س = لو ٣ ∴ س = ٣

∴ م.ح = {٣}

② بأخذ لوغاريتم للطرفين

∴ لو $\text{٢}^{\text{لو س}}$ = لو $\text{٢}^{\text{لو ٢}}$

∴ لو س لو ٢ = لو ٢ لو ٢ ∴ لو س = لو ٢

∴ س = ٢ ∴ م.ح = {٢}

③ بأخذ لوغاريتم للطرفين

∴ لو $\text{س}^{\text{لو س}}$ = لو ١٠

∴ لو س لو س = ١ ∴ $(\text{لو س})^{\text{٢}}$ = ١

∴ لو س = ١ أ، لو س = -١

∴ س = ١٠ أ، س = ٠.١

∴ م.ح = {١٠ ، ٠.١}

④ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٣}}$ = $\frac{\text{لو ٣}}{\text{لو س}}$ ∴ $(\text{لو س})^{\text{٢}}$ = $(\text{لو ٣})^{\text{٢}}$

∴ لو س = لو ٣ ومنها س = ٣

أ، لو س = - لو ٣ = لو $\text{٣}^{-\text{١}}$

ومنها س = $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ ∴ م.ح = {٣ ، $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$}

⑤ $(\text{س})^{\text{٢ لو}_{\text{س}}\text{ س}}$ = ٩ لو ١٠ ∴ $\text{س}^{\text{٢}}$ = ٩

∴ س = ٣ أ، س = -٣ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٣}

⑥ $\text{٤}^{\text{لو س}}$ × $\text{٥}^{\text{لو س}}$ = ٨٠٠٠

∴ $\text{٢٠}^{\text{لو س}}$ = ٨٠٠٠

∴ $\text{٢٠}^{\text{لو س}}$ = $\text{٢٠}^{\text{٣}}$

∴ لو س = ٣ ∴ س = ١٠٠٠

∴ مجموعة الحل = {١٠٠٠}

⑦ $\text{٢}^{(\text{لو س})^{\text{٢}}}$ × $\text{٢}^{\text{٦}}$ = $\text{٢}^{\text{٥ لو س}}$

∴ $(\text{لو س})^{\text{٢}}$ + ٦ = ٥ لو س

∴ $(\text{لو س})^{\text{٢}}$ - ٥ لو س + ٦ = ٠

∴ (لو س - ٢) (لو س - ٣) = ٠

∴ لو س = ٢ ومنها س = ١٠٠

أ، لو س = ٣ ومنها س = ١٠٠٠

∴ مجموعة الحل = {١٠٠ ، ١٠٠٠}

⑧ بالضرب × ٢ لو س

∴ ٢ $(\text{لو س})^{\text{٢}}$ - ٣ لو س - ٢ = ٠

∴ (٢ لو س + ١) (لو س - ٢) = ٠

∴ لو س = - $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ ومنها س = $\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{١٠}}}$

أ، لو س = ٢ ومنها س = ١٠٠

∴ مجموعة الحل = { $\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{١٠}}}$ ، ١٠٠ }

⑨ بفرض أن لو س = ك ∴ $\text{لو}_{\text{س}}$ ٢ = $\frac{\text{١}}{\text{ك}}$

∴ ك + $\frac{\text{١}}{\text{ك}}$ = ٢ ∴ $\text{ك}^{\text{٢}}$ - ٢ ك + ١ = ٠

∴ $(\text{ك - ١})^{\text{٢}}$ = ٠ ∴ ك = ١

∴ لو س = ١ ∴ س = ٢

∴ م.ح = {٢}

⑩ بفرض أن لو س = ك ∴ $\text{لو}_{\text{س}}$ ١٠ = $\frac{\text{١}}{\text{ك}}$

∴ لو س - ٢ $\text{لو}_{\text{س}}$ ١٠ = ١

∴ ك - $\frac{\text{٢}}{\text{ك}}$ = ١ ∴ $\text{ك}^{\text{٢}}$ - ك - ٢ = ٠

∴ (ك + ١) (ك - ٢) = ٠

∴ ك = -١ أ، ك = ٢

∴ لو س = -١ أ، لو س = ٢

∴ س = $\text{١٠}^{-\text{١}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{١٠}}$ أ، س = $\text{١٠}^{\text{٢}}$ = ١٠٠

∴ م.ح = { $\frac{\text{١}}{\text{١٠}}$ ، ١٠٠ }

⑪ لو $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$ × لو $(\frac{\text{س}}{\text{٢}})^{-\text{١}}$ = -١

∴ - $(\text{لو } \frac{\text{س}}{\text{٢}})^{\text{٢}}$ = -١ ∴ $(\text{لو } \frac{\text{س}}{\text{٢}})^{\text{٢}}$ = ١

∴ لو $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$ = ١ ومنها $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$ = ١٠

∴ س = ٢٠

أ، لو $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$ = -١ ومنها $\frac{\text{س}}{\text{٢}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{١٠}}$

∴ س = ٠.٢

∴ مجموعة الحل = {٢٠ ، ٠.٢}

⑫ $(\text{لو س})^{\text{٣}}$ = ٩ لو س

∴ $(\text{لو س})^{\text{٣}}$ - ٩ لو س = ٠

∴ لو س ($(\text{لو س})^{\text{٢}}$ - ٩) = ٠

∴ لو س (لو س - ٣) (لو س + ٣) = ٠

∴ لو س = ٠ ومنها س = ١

أ، لو س = ٣ ومنها س = ١٠٠٠

أ، لو س = -٣ ومنها س = ٠.٠٠١

∴ مجموعة الحل = {١ ، ١٠٠٠ ، ٠.٠٠١}

⑬ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ لو س لو س = لو (١٠٠ س)

∴ $(\text{لو س})^{\text{٢}}$ = لو ١٠٠ + لو س

∴ $(\text{لو س})^{\text{٢}}$ - لو س - ٢ = ٠

∴ (لو س - ٢) (لو س + ١) = ٠

∴ لو س = ٢ أ، لو س = -١

∴ س = ١٠٠ أ، س = $\frac{\text{١}}{\text{١٠}}$

∴ م.ح = { ١٠٠ ، $\frac{\text{١}}{\text{١٠}}$ }

⑭ (لو س + ٢) (لو س - لو ١٠٠) = ٥

∴ (لو س + ٢) (لو س - ٢) = ٥

∴ $(\text{لو س})^{\text{٢}}$ - ٤ = ٥ ∴ $(\text{لو س})^{\text{٢}}$ = ٩

∴ لو س = ٣ ومنها س = ١٠٠٠

أ، لو س = -٣ ومنها س = ٠.٠٠١

∴ مجموعة الحل = {١٠٠٠ ، ٠.٠٠١}

⑮ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٣}}$ + $\frac{\text{لو س}^{\text{٢}}}{\text{لو ٩}}$ + ٣ = ٠

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٣}}$ + $\frac{\text{٢ لو س}}{\text{٢ لو ٣}}$ = -٣

∴ $\frac{\text{٢ لو س}}{\text{لو ٣}}$ = -٣ ∴ لو س = $-\frac{\text{٣}}{\text{٢}}$ لو ٣

∴ لو س = لو $\text{٣}^{-\frac{\text{٣}}{\text{٢}}}$ = لو $\frac{\text{١}}{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}}$

∴ س = $\frac{\text{١}}{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}}$

∴ مجموعة الحل = { $\frac{\text{١}}{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}}$ }

⑯ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} = \frac{\text{لو (س + ٦)}}{\text{لو ٤}}$

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} = \frac{\text{لو (س + ٦)}}{\text{٢ لو ٢}}$

∴ ٢ لو س = لو (س + ٦)

∴ $س^{٢}$ = س + ٦   ∴ $س^{٢}$ − س − ٦ = ٠

∴ (س − ٣) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = −٢ (مرفوض)

∴ مجموعة الحل = {٣}

⑰ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} + \frac{\text{لو س}}{\text{لو ٤}} = \frac{-٣}{٢}$

∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} + \frac{\text{لو س}}{\text{٢ لو ٢}} = \frac{-٣}{٢}$

∴ $\frac{\text{٣ لو س}}{\text{٢ لو ٢}} = \frac{-٣}{٢}$ ∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٢}} = -١$

∴ لو س = لو $٢^{-١}$ ∴ س = $\frac{١}{٢}$

∴ م.ح = {$\frac{١}{٢}$}

⑱ ∵ $\sqrt{\text{لو}_٢\ \text{س}}$ = $\text{لو}_٢ \sqrt{\text{س}}$ بالتربيع

∴ $\text{لو}_٢$ س = $\text{لو}_٢ \sqrt{\text{س}} \times \text{لو}_٢ \sqrt{\text{س}}$

= $\text{لو}_٢\ \text{س}^{\frac{١}{٢}} \times \text{لو}_٢\ \text{س}^{\frac{١}{٢}}$

∴ $\text{لو}_٢$ س = $\frac{١}{٤}$ $(\text{لو}_٢\ \text{س})^{٢}$

∴ $(\text{لو}_٢\ \text{س})^{٢}$ − ٤ $\text{لو}_٢$ س = ٠

∴ $\text{لو}_٢$ س ($\text{لو}_٢$ س − ٤) = ٠

∴ $\text{لو}_٢$ س = ٠   أ، $\text{لو}_٢$ س = ٤

∴ س = $٢^{٠}$ = ١   أ، س = $٢^{٤}$ = ١٦

∴ م.ح = {١ ، ١٦}

⑲ بالتربيع للطرفين

∴ $\text{س}^{\text{لو} \sqrt{\text{س}}}$ = ١٠٠ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ لو $\sqrt{\text{س}}$ لو س = ٢

∴ $\frac{١}{٢}$ $(\text{لو س})^{٢}$ = ٢   ∴ $(\text{لو س})^{٢}$ = ٤

∴ لو س = ٢   أ، لو س = −٢

∴ س = ١٠٠   أ، س = $\frac{١}{١٠٠}$

∴ م.ح = {١٠٠ ، $\frac{١}{١٠٠}$}

⑳ $\sqrt{\text{لو} \left(٩١ + ٣^{\sqrt{\frac{\text{س}}{٢}}}\right)} = \sqrt{٢}$

∴ لو $\left(٩١ + ٣^{\sqrt{\frac{\text{س}}{٢}}}\right)$ = ٢

∴ ٩١ + $٣^{\sqrt{\frac{\text{س}}{٢}}}$ = $١٠^{٢}$ = ١٠٠

∴ $٣^{\sqrt{\frac{\text{س}}{٢}}}$ = ٩ = $٣^{٢}$ ∴ $\sqrt{\frac{\text{س}}{٢}}$ = ٢

∴ $\frac{\text{س}}{٢}$ = ٤   ∴ س = ٨

∴ مجموعة الحل = {٨}

㉑ لو ١ − لو ($٢^{\text{س}}$ + س − ١) = س (لو ٥ − لو ١٠)

∴ − لو ($٢^{\text{س}}$ + س − ١) = س لو $\frac{١}{٢}$

∴ − لو ($٢^{\text{س}}$ + س − ١) = − س لو ٢

∴ لو ($٢^{\text{س}}$ + س − ١) = لو $٢^{\text{س}}$

∴ $٢^{\text{س}}$ + س − ١ = $٢^{\text{س}}$

∴ س − ١ = ٠   ∴ س = ١

∴ م.ح = {١}

١٠

① (د)	② (أ)	③ (أ)	④ (د)	⑤ (أ)
⑥ (ج)	⑦ (د)	⑧ (د)	⑨ (ب)	

١١

① من هندسة الشكل

$\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٦}} = \frac{\text{لو ٤٩}}{\text{لو ٧}}$ ∴ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٦}} = \frac{\text{٢ لو ٧}}{\text{لو ٧}}$

∴ ٢ لو ٦ = لو س   ∴ س = ٣٦

② م ء = $\text{لو}_{٨١}$ ٢٤٣ = $\text{لو}_{٨١} (٨١)^{\frac{٥}{٤}}$ = $\frac{٥}{٤}$ $\text{لو}_{٨١}$ ٨١ = $\frac{٥}{٤}$

، ∵ م ء = $\frac{١}{٣}$ أ ء

∴ أ ء = $\frac{١٥}{٤}$ ، أ ء = $\frac{١}{٢}$ ب حـ

∴ ب حـ = ٢ × $\frac{١٥}{٤}$ = ٧.٥ سم

③ ق (∠ أ) = ٩٠° ، $\overline{\text{أء}} \perp \overline{\text{حـ ب}}$

∴ $(\text{أ حـ})^{٢}$ = حـ ء × حـ ب

∴ $(٥\sqrt{٣})^{٢}$ = $\text{لو}_{\text{س}}$ ٢٧ × ($\text{لو}_{\text{س}}$ ٢٧ + $\text{لو}_{\text{س}}$ ٣)

∴ ٧٥ = $\text{لو}_{\text{س}}$ ٢٧ × $\text{لو}_{\text{س}}$ ٨١

∴ ٧٥ = ٣ $\text{لو}_{\text{س}}$ ٣ × ٤ $\text{لو}_{\text{س}}$ ٣

∴ ٧٥ = ١٢ $(\text{لو}_{\text{س}}\ ٣)^{٢}$

∴ $(\text{لو}_{\text{س}}\ ٣)^{٢}$ = $\frac{٧٥}{١٢}$ = $\frac{٢٥}{٤}$

∴ $\text{لو}_{\text{س}}$ ٣ = $\frac{٥}{٢}$ ومنها $\text{س}^{\frac{٥}{٢}}$ = ٣

∴ س = $٣^{\frac{٢}{٥}}$ = ١.٦

أ، $\text{لو}_{\text{س}}$ ٣ = $\frac{-٥}{٢}$ ومنها $\text{س}^{\frac{-٥}{٢}}$ = ٣

∴ س = $\left(\frac{١}{٣}\right)^{\frac{٢}{٥}}$ = ٠.٦

④ ∵ $\overline{\text{أء}}$ ينصف ∠ أ   ∴ $\frac{\text{حـ أ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{حـ ء}}{\text{ء ب}}$

∴ $\frac{\text{لو ٥}}{\text{لو س}} = \frac{\text{لو ب}}{\text{لو ب}^{٢}}$ ∴ $\frac{\text{لو ٥}}{\text{لو س}} = \frac{\text{لو ب}}{\text{٢ لو ب}}$

∴ ٢ لو ٥ × لو س   ∴ لو ٢٥ = لو س

∴ $\frac{\text{لو ٢٥}}{\text{لو ٢}} = \frac{\text{لو س}}{\text{لو ٤}}$ ∴ $\frac{\text{لو ٢٥}}{\text{لو ٢}} = \frac{\text{لو س}}{\text{٢ لو ٢}}$

∴ لو س = ٢ لو ٢٥ = لو ٦٢٥

∴ س = ٦٢٥

١٢

① ∵ لو $\text{ص}^{٢}$ = ٣ − لو ١٢٥

∴ لو $\text{ص}^{٢}$ = لو ١٠٠٠ − لو ١٢٥ = لو $\frac{١٠٠٠}{١٢٥}$

∴ $\text{ص}^{٢}$ = ٨   ∴ ص = ٢

، ∵ لو س ص = ١ − لو ٥ وبالتعويض عن ص = ٢

∴ لو ٢ س = ١ − لو ٥ = لو ١٠ − لو ٥ = لو ٢

∴ ٢ س = ٢   ∴ س = ١

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٢)}

② ∵ لو (س ص) + ٢ = ٢ + لو ٩

∴ لو (س ص) = لو ٩   ∴ س ص = ٩

، ∵ س = ١٠ − ص

∴ (١٠ − ص) ص = ٩

∴ $\text{ص}^{٢}$ − ١٠ ص + ٩ = ٠

∴ (ص − ٩) (ص − ١) = ٠

∴ ص = ٩ ومنها س = ١ أ، ص = ١ ومنها س = ٩

∴ مجموعة الحل = {(١ ، ٩) ، (٩ ، ١)}

③ ∵ ٣ لو س + ٢ لو ص = ١١   (١)

، ٢ لو س − ٣ لو ص = ٣   (٢)

وبضرب (١) × ٣ ، (٢) × ٢ والجمع

∴ ١٣ لو س = ٣٩   ∴ لو س = ٣

∴ س = ١٠٠٠ وبالتعويض في (١)

∴ ٣ لو ١٠٠٠ + ٢ لو ص = ١١

∴ ٩ + ٢ لو ص = ١١   ∴ لو ص = ١

∴ ص = ١٠

∴ مجموعة الحل = {(١٠٠٠ ، ١٠)}

١٣

① الطرف الأيمن = $\text{لو}_٣ \frac{\text{س}^{٥} \times \text{ص}^{٤}}{\text{س}^{٣}\ \text{ص}^{٢}}$ = $\text{لو}_٣\ \text{س}^{٢}\ \text{ص}^{٢}$

= $\text{لو}_٣ (\text{س ص})^{٢}$ = ٢ $\text{لو}_٣$ س ص

= ٢ $\text{لو}_٣\ ٩\sqrt{٣}$ = ٢ $\text{لو}_٣\ ٣^{\frac{٥}{٢}}$ = ٥

② ∵ $\frac{١}{٢}$ لو أ = $\frac{١}{٥}$ لو ب = لو حـ   ∴ حـ = $\text{أ}^{\frac{١}{٢}}$

∴ أ = $\text{حـ}^{٢}$ ، حـ = $\text{ب}^{\frac{١}{٥}}$ ∴ ب = $\text{حـ}^{٥}$

∴ أ ب = $\text{حـ}^{٢} \times \text{حـ}^{٥}$ = $\text{حـ}^{٧}$

③ ∵ لو $\frac{\text{س + ص}}{3}$ = ½ لو (س ص) = لو (س ص)^½

∴ $\frac{\text{س + ص}}{3}$ = (س ص)^½ وبتربيع الطرفين

∴ س² + ص² + ٢ س ص = ٩ س ص

∴ س² + ص² = ٧ س ص

وبالقسمة على س ص ∴ $\frac{\text{س}}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = ٧

④ ∵ ٣^(لو أ س) = أ وبأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس أ

∴ لو_أ س لو_أ ٣ = ١

∴ لو_أ س معكوس ضربي للعدد لو_أ ٣

، عندما أ = ٩ ∴ لو_٩ س لو_٩ ٣ = ١

∴ لو_٩ س لو_٩ ٩^½ = ١ ∴ ½ لو_٩ س = ١

∴ لو_٩ س = ٢

⑤ نفرض أن: لو_أ ب = س ∴ ب = أ^س

∴ لو_(أ²) ب² = لو_(أ²) أ^(٢س) = س لو_(أ²) أ² = س = لو_أ ب

∴ لو_أ ب² + لو_(أ²) ب² = ٢ لو_أ ب + لو_أ ب²

= ٢ لو_أ ب + ٢ لو_أ ب = ٤ لو_أ ب

⑥ لو $\frac{\text{س}^3 \times \text{ص}^4}{\text{س ص}^2}$ = ٢ لو ٦

∴ لو س² ص² = لو ٣٦ ∴ س² ص² = ٣٦

∴ س ص = ٦ ∴ س = $\frac{6}{\text{ص}}$

⑦ الطرف الأيمن = ٢ لو (س + ص)

= لو (س + ص)²

= لو (س² + ٢ س ص + ص²)

= لو (١٠ س ص)

= لو ١٠ + لو س + لو ص

= ١ + لو س + لو ص

⑧ لو (س + ص) = ½ لو (س ص) + لو ٢

∴ لو (س + ص) − لو ٢ = ½ لو (س ص)

∴ لو $\frac{\text{س + ص}}{2}$ = لو (س ص)^½

∴ $\frac{\text{س + ص}}{2}$ = س^½ ص^½ بالتربيع

∴ س² + ص² + ٢ س ص = ٤ س ص

∴ س² − ٢ س ص + ص² = ٠

∴ (س − ص)² = ٠ ∴ س − ص = ٠

∴ س = ص

⑨ ∵ لو س ص² = ١ ∴ س ص² = ١٠

∴ س = $\frac{10}{\text{ص}^2}$ (١)

، ∵ لو س² ص = ١ ∴ س² ص = ١٠

ومن معادلة (١)

∴ $\frac{100}{\text{ص}^4}$ × ص = ١٠ ∴ $\frac{10}{\text{ص}^3}$ = ١

∴ ص³ = ١٠ ∴ ص = ١٠^⅓

ومن (١) س = ١٠^⅓

∴ لو س ص = لو (١٠^⅓ × ١٠^⅓)

= لو ١٠^⅔ = ⅔ لو ١٠ = ⅔

⑩ الطرف الأيسر = $\frac{1}{\text{لو}_{\text{س}}\ \text{ص}}$ = $\frac{1}{\frac{\text{لو ص}}{\text{لو س}}}$ = $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ص}}$

= لو_ص س

لو_٣ س + ٢ لو_س ٣ = ٤

بفرض أن لو_٣ س = ك

∴ ك + $\frac{2}{\text{ك}}$ = ٤ ∴ ك² + ٢ = ٤ ك

∴ ك² − ٤ ك + ٢ = ٠

∴ (ك − ١) (ك − ٣) = ٠

∴ ك = ١ أ، ك = ٣

∴ لو_٣ س = ١ أ، لو_٣ س = ٣

∴ س = ٣ أ، س = ٢٧

∴ م.ح = {٣ ، ٢٧}

⑪ ∵ لو_ع ص = $\frac{1}{\text{لو}_{\text{ص}}\ \text{س}}$

، ∵ $\frac{4}{\text{لو}_{\text{س}}\ \text{ع}} + \frac{7}{\text{لو}_{\text{ع}}\ \text{ص}}$ = ٣ لو_س ع

∴ ٤ لو_س س + ٧ لو_س ع = ٣ لو_س ع

∴ س⁴ × ع⁷ = ع³

∴ س⁴ ع⁴ = ١ ∴ س ع = ١

⑫ ∵ ص = أ^(لو_أ س)

وبأخذ اللوغاريتم للأساس أ للطرفين

∴ لو_أ ص = لو_أ س لو_أ أ

∴ لو_أ ص = لو_أ س ∴ ص = س

∴ ٣^(½ لو_٣ ٤٩) = ٣^(لو_٣ √٤٩) = ٣^(لو_٣ ٧) = ٧

⑬ لو_(أ^س) أ^ص = $\frac{\text{لو أ}^{\text{ص}}}{\text{لو أ}^{\text{س}}}$ = $\frac{\text{ص لو أ}}{\text{س لو أ}}$ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

∴ لو_√٥ ١٢٥ = لو_(٥)^½ (٥)³ = $\frac{3}{\frac{1}{2}}$ = ٦

، لو_٨ √٢ = لو_(٢)³ (٢)^½ = $\frac{\frac{1}{2}}{3}$ = $\frac{1}{6}$

∴ لو_√٥ ١٢٥ × لو_٨ √٢ = ٦ × $\frac{1}{6}$ = ١

⑭ بوضع لو_ب أ = س ∴ ب^س = أ

∴ س لو ب = لو أ ∴ س = $\frac{\text{لو أ}}{\text{لو ب}}$

∴ لو_ب أ = $\frac{\text{لو أ}}{\text{لو ب}}$

الطرف الأيمن = $\frac{1}{\text{لو}_{\text{أ}}\ \text{أ ب}} + \frac{1}{\text{لو}_{\text{ب}}\ \text{أ ب}}$ = $\frac{1}{\text{لو}_{\text{أ}}\ \text{أ} + \text{لو}_{\text{أ}}\ \text{ب}} + \frac{1}{\text{لو}_{\text{ب}}\ \text{أ} + \text{لو}_{\text{ب}}\ \text{ب}}$

= $\frac{1}{1 + \frac{\text{لو ب}}{\text{لو أ}}} + \frac{1}{\frac{\text{لو أ}}{\text{لو ب}} + 1}$

= $\frac{\text{لو أ}}{\text{لو أ + لو ب}} + \frac{\text{لو ب}}{\text{لو أ + لو ب}}$

= $\frac{\text{لو أ + لو ب}}{\text{لو أ + لو ب}}$ = ١

⑮ لو_ب $\frac{4 \times \text{أ} \times \text{ب}}{(\text{أ + ب})^2}$ = ٠ ∴ $\frac{4\ \text{أ ب}}{(\text{أ + ب})^2}$ = ١

∴ (أ + ب)² = ٤ أ ب

∴ أ² + ٢ أ ب + ب² = ٤ أ ب

∴ أ² − ٢ أ ب + ب² = ٠

∴ (أ − ب)² = ٠ ∴ أ − ب = ٠

⑯ س^(٢ لو س) × س³ = ١٠⁵

∴ لو (س^(٢ لو س) × س³) = ٥ لو ١٠

∴ لو س^(٢ لو س) + لو س³ = ٥

∴ ٢ لو س لو س + ٣ لو س = ٥

∴ ٢ (لو س)² + ٣ لو س − ٥ = ٠

∴ (٢ لو س + ٥) (لو س − ١) = ٠

∴ لو س = −$\frac{5}{2}$ ومنها س = ١٠^(−⁵⁄₂) = $\frac{1}{100\sqrt{10}}$

أ، لو س = ١ ومنها س = ١٠

⑰ ص − $\frac{1}{\text{ص}}$ = ١ ∴ ص² − ص − ١ = ٠

∴ ص = $\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$ = $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

∴ أ^س = $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

∴ س لو_م أ = لو_م $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

∴ س = لو_أ $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (ويرفض الحل الآخر)

⑱ د (س + ١) + د (س − ١) = د (٣)

∴ لو (س + ١)² + لو (س − ١)² = لو ٣²

∴ لو (س + ١)² (س − ١)² = لو ٩

∴ (س² − ١)² = ٩ ∴ س² − ١ = ٣

أ، س² − ١ = −٣ (مرفوض)

∴ س² = ٤ ∴ س = ± ٢

∴ م.ح = {٢ ، −٢}

(١٩) د (−س) = لو $\left(\sqrt{(-س)^{٢} + ١} - (-س)\right)$

= لو $\left(\sqrt{س^{٢} + ١} + س\right)$

بالضرب فى المرافق

= لو $\left[\left(\sqrt{س^{٢}+١} + س\right) \times \frac{\sqrt{س^{٢}+١} - س}{\sqrt{س^{٢}+١} - س}\right]$

= لو $\left(\frac{س^{٢} + ١ - س^{٢}}{\sqrt{س^{٢}+١} - س}\right)$

= لو $\left(\frac{١}{\sqrt{س^{٢}+١} - س}\right)$

= لو $\left(\sqrt{س^{٢}+١} - س\right)^{-١}$

= − لو $\left(\sqrt{س^{٢}+١} - س\right)$ = − د (س)

∴ د (−س) = − د (س)

∴ الدالة فردية.

(٢٠) لو ٤^{١٧} = ٢٨.٢ ∴ ٢٨ < لو ٤^{١٧} < ٢٩

∴ عدد أرقام العدد ٤^{١٧} = ٢٩ رقمًا

١٤

(١) (أ)	(٢) (د)	(٣) (جـ)	(٤) (د)
(٥) (ب)	(٦) (جـ)	(٧) (جـ)	(٨) (جـ)
(٩) (أ)	(١٠) (د)	(١١) (د)	(١٢) (د)
(١٣) (جـ)	(١٤) (جـ)	(١٥) (جـ)	

إرشادات لحل رقم ١٤

(١) ∵ لو س = ع + لو ص

∴ لو س − لو ص = ع

∴ لو $\frac{س}{ص}$ = ع

∴ $\frac{س}{ص}$ = (١٠)^{ع}

∴ س = ص × (١٠)^{ع}

(٢) المقدار = $\frac{١}{لو_{ب} ب + لو_{ب} أ + لو_{ب} جـ}$ + $\frac{١}{لو_{جـ} جـ + لو_{جـ} أ + لو_{جـ} ب}$ + $\frac{١}{لو_{أ} أ + لو_{أ} ب + لو_{أ} جـ}$

= $\frac{١}{لو_{ب} أبجـ}$ + $\frac{١}{لو_{جـ} أبجـ}$ + $\frac{١}{لو_{أ} أبجـ}$

= لو$_{أبجـ}$ ب + لو$_{أبجـ}$ جـ + لو$_{أبجـ}$ أ

= لو$_{أبجـ}$ أبجـ = ١

(٣) ∵ (٢٥)^{س} − ١٢ × (٥)^{س} + ٢٧ = ٠

∴ (٥^{س} − ٩) (٥^{س} − ٣) = ٠

∴ ٥^{س} − ٩ = ٠ ومنها ٥^{س} = ٩

∴ س = لو$_{٥}$ ٩

أ، ٥^{س} − ٣ = ٠ ومنها ٥^{س} = ٣

∴ س = لو$_{٥}$ ٣

∴ مجموع الجذرين = لو$_{٥}$ ٩ + لو$_{٥}$ ٣ = لو$_{٥}$ ٢٧

(٤) بوضع ٣$^{لو س}$ = ص (بأخذ لوغاريتم الطرفين)

∴ لو س لو ٣ = لو ص

أى لو ٣ لو س = لو ص

∴ لو س$^{لو ٣}$ = لو ص

∴ س$^{لو ٣}$ = ص أى أن ٣$^{لو س}$ = س$^{لو ٣}$

(٥) ∵ لو$_{جـ}$ لو$_{ب}$ لو$_{أ}$ أ$^{ب^{جـ}}$

= لو$_{جـ}$ لو$_{ب}$ (ب^{جـ} لو$_{أ}$ أ) = لو$_{جـ}$ لو$_{ب}$ ب^{جـ}

= لو$_{جـ}$ (جـ لو$_{ب}$ ب) = لو$_{جـ}$ جـ = ١

(٦) ∵ ب^{س} − ٢ ب$^{-س}$ = ١

∴ ب^{٢س} − ب^{س} − ٢ = ٠

∴ (ب^{س} + ١) (ب^{س} − ٢) = ٠

∴ ب^{س} = −١ (مرفوض) أ، ب^{س} = ٢

ومنها س = لو$_{ب}$ ٢

(٧) ∵ $\frac{١}{لو_{٢} س}$ + $\frac{١}{لو_{٤} س}$ + $\frac{١}{لو_{٨} س}$ + $\frac{١}{لو_{١٦} س}$ = ٥

∴ لو$_{س}$ ٢ + لو$_{س}$ ٤ + لو$_{س}$ ٨ + لو$_{س}$ ١٦ = ٥

∴ لو$_{س}$ (٢ × ٤ × ٨ × ١٦) = ٥

∴ لو$_{س}$ ١٠٢٤ = ٥

∴ س^{٥} = ١٠٢٤ = (٤)^{٥} ∴ س = ٤

(٨) ∵ لو ١ = صفر ، لو ١٠ = ١

، ∴ لو أ ∈]٠ ، ١[∴ أ ∈]١ ، ١٠[

(٩) برسم منحنى الدالة د (أ) = لو$_{٣}$ أ

نجد أن إذا كانت أ ∈]٠ ، ٩]

فإن لو$_{٣}$ أ ∈]−∞ ، ٢]

(١٠) ∵ ٣$^{لو_{٣} (س + ٤)}$ + ٣$^{لو_{٣} (س + ٥)}$ = (٢٥)$^{لو_{٥} ٧}$

∴ (س + ٤) + (س + ٥) = ٥$^{٢ لو_{٥} ٧}$

= ٥$^{لو_{٥} ٤٩}$ = ٤٩

∴ ٢ س + ٩ = ٤٩ ∴ ٢ س = ٤٠

∴ س = ٢٠ ∴ م.ح = {٢٠}

(١١) ∵ لو$_{ص}$ س = لو$_{س}$ ص

∴ لو$_{ص}$ س = $\frac{١}{لو_{ص} س}$ ∴ (لو$_{ص}$ س)^{٢} = ١

∴ لو$_{ص}$ س = ± ١

∴ س = ص أ، س = ص$^{-١}$ = $\frac{١}{ص}$

∴ الاجابتين أ ، ب صحيحتين

∴ الاجابة رقم (د)

(١٢) ∵ ٣^{أ} = ٥^{ب} ∴ أ لو ٣ = ب لو ٥

∴ $\frac{أ}{ب}$ = $\frac{لو ٥}{لو ٣}$ = لو$_{٣}$ ٥

، ∵ ٣^{أ} = ٧^{جـ} ∴ أ لو ٣ = جـ لو ٧

∴ $\frac{أ}{جـ}$ = $\frac{لو ٧}{لو ٣}$ = لو$_{٣}$ ٧

∴ $\frac{أ}{ب}$ + $\frac{أ}{جـ}$ = لو$_{٣}$ ٥ + لو$_{٣}$ ٧ = لو$_{٣}$ ٣٥

(١٣) ∵ لو$_{٢}$ س + لو$_{٤}$ س + لو$_{٨}$ س = ١١

∴ $\frac{لو س}{لو ٢}$ + $\frac{لو س}{لو ٤}$ + $\frac{لو س}{لو ٨}$ = ١١

∴ $\frac{لو س}{لو ٢}$ + $\frac{لو س}{٢ لو ٢}$ + $\frac{لو س}{٣ لو ٢}$ = ١١

∴ $\frac{٦ لو س + ٣ لو س + ٢ لو س}{٦ لو ٢}$ = ١١

∴ ١١ لو س = ١١ × ٦ لو ٢

∴ لو س = ٦ لو ٢ = لو ٢^{٦} = لو ٦٤

∴ س = ٦٤

(١٤) ∵ لو$_{٢}$ ٣ × لو$_{٣}$ ٤ × لو$_{٤}$ ٥ × ... × لو$_{ن}$ (ن + ١) = ١٠

∴ $\frac{لو ٣}{لو ٢}$ × $\frac{لو ٤}{لو ٣}$ × $\frac{لو ٥}{لو ٤}$ × ... × $\frac{لو (ن + ١)}{لو ن}$ = ١٠

∴ لو (ن + ١) = ١٠ لو ٢

∴ لو (ن + ١) = لو ٢^{١٠}

∴ ن + ١ = ١٠٢٤ ∴ ن = ١٠٢٣

(١٥) ∵ د (س) = لو ٢^{س} ∴ د (س) = س لو ٢

∴ د (س) دالة خطية يمثلها خط مستقيم ميله = لو ٢

∴ الإجابة رقم جـ

١٥

(١) المقدار = لو$_{٣}$ $\left(\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٤} \times ..... \times \frac{٨٠}{٨١}\right)$

= لو$_{٣}$ $\left(\frac{١}{٨١}\right)$ = لو$_{٣}$ ٣$^{-٤}$ = −٤

(٢) المقدار = لو ظا ١° + لو ظا ٢° + ... + لو ظا ٤٥° + ...

+ لو ظا ٨٨° + لو ظا ٨٩°

= لو (ظا ١° ظا ٢° ... ظا ٤٥° ... ظا ٨٨° ظا ٨٩°)

= لو (ظا ١° ظا ٢° ... ظا ٤٥° ... ظتا ٢° ظتا ١°)

= لو ظا ٤٥° = لو ١ = صفر

③ المقدار = لو ظا ١° × لو ظا ٢° × ... لو ظا ٤٥° × ... × لو ظا ٧٣°

= لو ظا ١° × لو ظا ٢° × ... × لو ١ × ... × لو ظا ٧٣°

= صفر

١٦ ∵ $\text{لو}_{\text{ب}^{٢}}\text{س}^{٢} = \frac{\text{لو س}^{٢}}{\text{لو ب}^{٢}} = \frac{٢\,\text{لو س}}{٢\,\text{لو ب}} = \frac{\text{لو س}}{\text{لو ب}}$

$= \text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س}$

، ∵ $\text{لو}_{\text{ب}^{٣}}\text{س}^{٣} = \frac{\text{لو س}^{٣}}{\text{لو ب}^{٣}} = \frac{٣\,\text{لو س}}{٣\,\text{لو ب}} = \frac{\text{لو س}}{\text{لو ب}}$

$= \text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س}$ وهكذا

$\text{لو}_{\text{ب}^{ن}}\text{س}^{ن} = \frac{\text{لو س}^{ن}}{\text{لو ب}^{ن}} = \frac{ن\,\text{لو س}}{ن\,\text{لو ب}} = \frac{\text{لو س}}{\text{لو ب}}$

$= \text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س}$

∴ $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{ب}^{٢}}\text{س}^{٢} + \text{لو}_{\text{ب}^{٣}}\text{س}^{٣} + ... + \text{لو}_{\text{ب}^{ن}}\text{س}^{ن}$

$= \text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س} + \text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س} + ... + \text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س}$

$= ن\,\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س} = \text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س}^{ن}$

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الثانية

تطبيق على الدرس الأول

١

① الزيادة فى طول نصف القطر

$= \left(\frac{٣ \times ٣٦\,\pi}{٤\,\pi}\right)^{\frac{١}{٣}} - \left(\frac{٣ \times \frac{٣٢}{٣}\,\pi}{٤\,\pi}\right)^{\frac{١}{٣}}$

$= (٢٧)^{\frac{١}{٣}} - (٨)^{\frac{١}{٣}} = ١$ وحدة طول.

تطبيق على الدرس الثالث

٢

① $\text{جـ}_{١٠}$ (مجموع العشرة أعداد الأولى)

$= ٢\,(٢^{١٠} - ١) = ٢^{١١} - ٢ = ٢٠٤٦$

② $\text{جـ}_{ن} = ١٣١٠٧٠$

∴ $٢\,(٢^{ن} - ١) = ١٣١٠٧٠$

∴ $٢^{ن} - ١ = ٦٥٥٣٥$ ∴ $٢^{ن} = ٦٥٥٣٦$

∴ $٢^{ن} = ٢^{١٦}$ ∴ $ن = ١٦$

∴ عدد الحدود = ١٦ حدًا

تطبيقات على الدرس الخامس

١

① $د(٠) = ٧٠ - ٤\,\text{لو}_{٢}\,١ = ٧٠$ درجة

② $د(٧) = ٧٠ - ٤\,\text{لو}_{٢}\,٨ = ٥٨$ درجة

٢

① $د(٠) = ٨٥ - ٢٥\,\text{لو}\,١ = ٨٥\,\%$

② $د(٣) = ٨٥ - ٢٥\,\text{لو}\,٤ \simeq ٦٩.٩٥\,\%$

③ $د(١٢) = ٨٥ - ٢٥\,\text{لو}\,١٣ \simeq ٥٧.١٥\,\%$

٣

① $د(٣٦٠٠) = \frac{١٠}{١٠٠} \times ٣٦٠٠ = ٣٦٠$ جنيهًا.

② $د(٨٠٠٠) = \frac{١٠}{١٠٠} \times ٨٠٠٠ + ١٠٠\,\text{لو}\,(٨٠٠٠ - ٤٩٩٩)$

$= ١١٤٧.٧٢٦٦$ جنيهًا.

تطبيقات على الدرس السادس

١

① الرقم الهيدروچينى $= -\,\text{لو}\,١٠^{-٣}$

$= ٣\,\text{لو}\,١٠ = ٣$

② عندما يكون الرقم الهيدروچينى = ٩

∴ $٩ = -\,\text{لو}\,(H^{+})$ ∴ $\text{لو}\,(H^{+}) = -٩$

∴ $H^{+} = ١٠^{-٩}$

أى أن تركيز الهيدروچين $= ١٠^{-٩}$

٢

① أ هو عدد السكان الابتدائى ، ن عدد السنوات

∴ عدد السكان بعد ن سنة $= أ\left(١ + \frac{٧}{١٠٠}\right)^{ن}$

$= أ\,(١.٠٧)^{ن}$

∴ عدد السكان بعد عام $= أ\,(١.٠٧)$

② عندما يتضاعف عدد السكان

∴ $٢\,أ = أ\,(١.٠٧)^{ن}$ ∴ $٢ = (١.٠٧)^{ن}$

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ $ن\,\text{لو}\,١.٠٧ = \text{لو}\,٢$ ∴ $ن \simeq ١٠$ سنوات.

٣

$ع = ١٠^{٥}\,(١.٣)^{ن - ٢٠١٠}$

① عام ٢٠١٥ يكون عدد السكان

$ع = ١٠^{٥}\,(١.٣)^{٢٠١٥ - ٢٠١٠} = ٣٧١٢٩٣$ نسمة.

② عندما يصبح عدد السكان ١.٤ مليون نسمة

∴ $١.٤ \times ١٠^{٦} = ١٠^{٥}\,(١.٣)^{ن - ٢٠١٠}$

∴ $(١.٣)^{ن - ٢٠١٠} = ١٤$

بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ $(ن - ٢٠١٠)\,\text{لو}\,١.٣ = \text{لو}\,١٤$

∴ $ن - ٢٠١٠ \simeq ١٠$ ∴ $ن \simeq ٢٠٢٠$

٤

① ∵ $د = \text{لو}\,\frac{ش}{ش_{٠}}$

∴ $د = \text{لو}\,\frac{١.٥ \times ١٠^{٦}\,ش_{٠}}{ش_{٠}} = \text{لو}\,(١.٥ \times ١٠^{٦})$

$\simeq ٦.٢$

أى أن الزلزال درجته على مقياس ريختر = ٦.٢

② عندما تكون درجة الزلزال (د) = ٨

∴ $٨ = \text{لو}\,\frac{ش}{ش_{٠}}$ ∴ $\frac{ش}{ش_{٠}} = ١٠^{٨}$

∴ $ش = ١٠^{٨}\,ش_{٠}$

أى أن شدة الزلزال تعادل $١٠^{٨}$ مرة قدر الشدة الابتدائية.

٥

∵ $ك = ك_{٠}\,(٠.٩)^{ن}$

∴ $\frac{٤٠}{١٠٠}\,ك_{٠} = ك_{٠}\,(٠.٩)^{ن}$

∴ $٠.٤ = (٠.٩)^{ن}$ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ $ن\,\text{لو}\,٠.٩ = \text{لو}\,٠.٤$

∴ $ن = \frac{\text{لو}\,٠.٤}{\text{لو}\,٠.٩} \simeq ٩$ سنوات.

٦

بفرض أن الكفاءة الابتدائية للآلة أ

∴ $أ = أ_{٠}\left(١ - \frac{٥}{١٠٠}\right)^{ن}$

عندما تتوقف الآلة عن التشغيل

∴ $\frac{٦٠}{١٠٠}\,أ_{٠} = أ_{٠}\,(٠.٩٥)^{ن}$

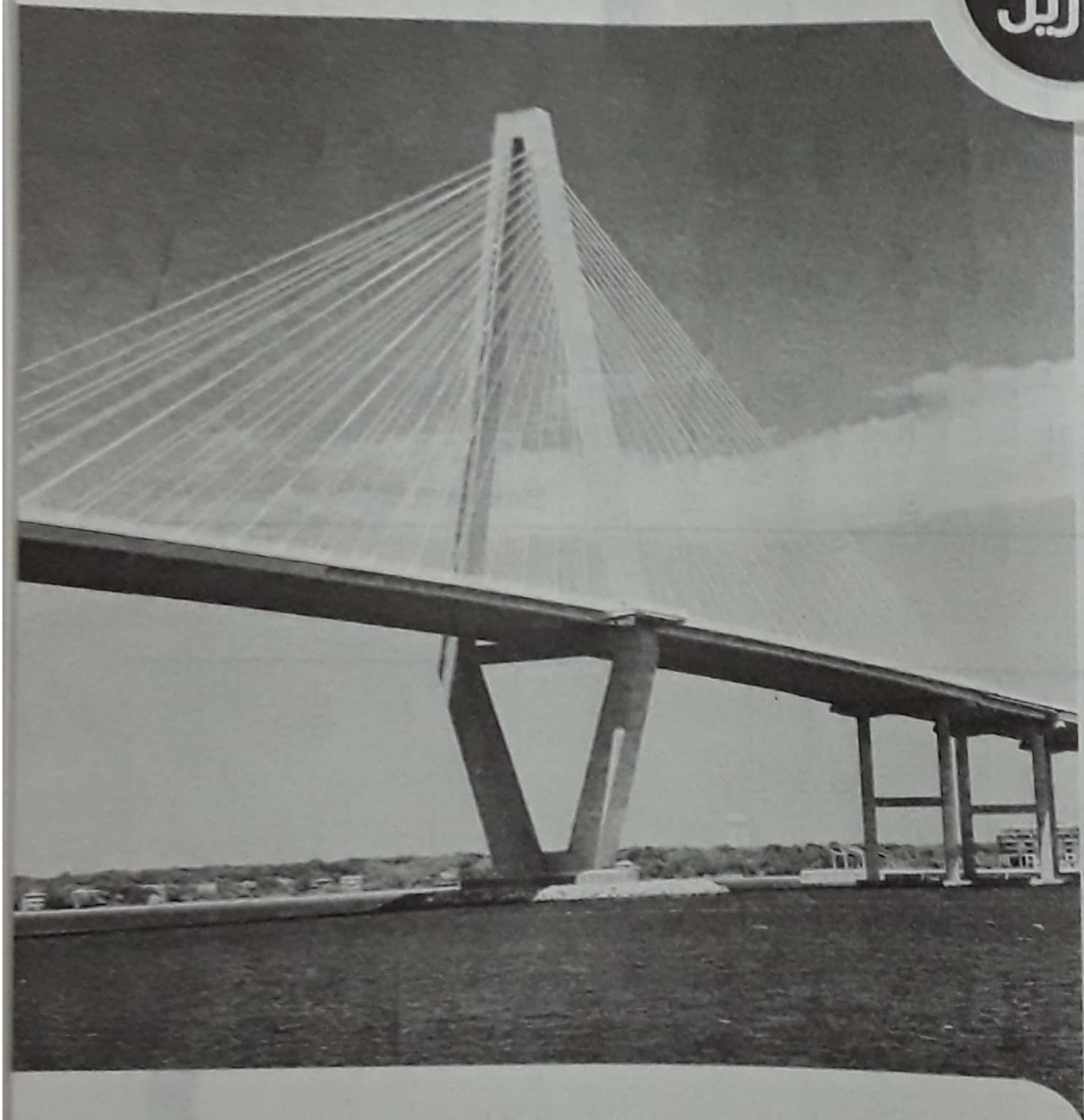
∴ $٠.٦ = (٠.٩٥)^{ن}$ بأخذ اللوغاريتم للطرفين

∴ $ن\,\text{لو}\,٠.٩٥ = \text{لو}\,٠.٦$

∴ $ن \simeq ١٠$ سنوات

إجابات
تمارين

التفاضل وحساب المثلثات



Scanned by CamScanner

إجابات الوحدة الثالثة

إجابات تمارين 12

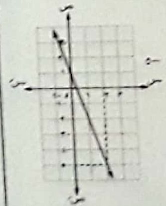
١

س	١.٩	١.٩٩	١.٩٩٩	←	٢	→	٢.٠٠١	٢.٠١	٢.١
د(س)	١٣.٥	١٣.٩٥	١٣.٩٩٥	←	١٤	→	١٤.٠٠٥	١٤.٠٥	١٤.٥

∴ نهـــا (س ← ٢) د (س) = ١٤

٢

① بيانياً :



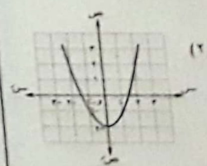
∴ نهـــا (س ← ٢) (١ − ٣ س) = −٥

عددياً :

س	١.٩	١.٩٩	١.٩٩٩	←	٢	→	٢.٠٠١	٢.٠١	٢.١
د(س)	−٤.٧	−٤.٩٧	−٤.٩٩٧	←	−٥	→	−٥.٠٠٣	−٥.٠٣	−٥.٣

∴ نهـــا (س ← ٢) (١ − ٣ س) = −٥

② بيانياً :



∴ نهـــا (س ← ٠) (س^2 − ٢)

= −٢

عددياً :

س	−٠.١	−٠.٠١	−٠.٠٠١	←	٠	→	٠.٠٠١	٠.٠١	٠.١
د(س)	−١.٩٩	−١.٩٩٩٩	−١.٩٩٩٩٩٩	←	−٢	→	−١.٩٩٩٩٩٩	−١.٩٩٩٩	−١.٩٩

∴ نهـــا (س ← ٠) (س^2 − ٢) = −٢

٣

① غير معرفة. ② ٢
③ ٢ ④ غير موجودة.

٤

① ١ ② ٢ ③ ١ ④ غير موجودة.

٥

① ٢ ② ١ ③ ١
④ ١ ⑤ ١.٥ ⑥ ١.٥

٦

① ١ ② −١ ③ ٣ ④ غير موجودة.

٧

① ٢ ② ١ ③ ١ ④ ١

٨

① غير معرفة. ② ∞
③ ∞ ④ ∞

٩

① غير معرفة. ② ∞
③ −∞ ④ غير موجودة.

١٠

① ١ ② ١ ③ ٤ ④ غير موجودة.
⑤ غير معرفة. ⑥ ٣ ⑦ ٣ ⑧ ٣

١١

① صفر ② −٣
③ غير موجودة. ④ غير موجودة.

١٢

① صفر ② −٢ ③ غير موجودة.
④ −١ ⑤ غير موجودة.
⑥ ١ ⑦ صفر ⑧ غير موجودة.
⑨ صفر ⑩ غير موجودة.

١٣

① ٤ ② غير موجودة.
③ غير موجودة. ④ ١ ، ٤ ، غير معرفة.
⑤ ٢ ⑥ ٢ ⑦ ٢
⑧ ٣ ⑨ ١ ⑩ غير موجودة.
⑪ ٤ ⑫ غير موجودة.

١٤

① (ﺟ) ② (ﺟ) ③ (د) ④ (أ)
⑤ (د) ⑥ (أ) ⑦ (ﺟ)

إرشادات لحل رقم ١٤

① لاحظ أن كل من الأشكال (أ) ، (ب) ، (د) تحتوى على قفزة عند س = ٣ وبالتالى لا توجد للدالة نهاية عند س = ٣

أما شكل (ﺟ) يحتوى على فجوة عند س = ٣ وبالتالى توجد للدالة نهاية عند س = ٣

② عندما س ← ٠

∴ طول الوتر $\overline{أب}$ ← طول القطر (٢ نق)

أى أن : ص ← ١٠

③ عندما θ ← $\frac{\pi}{٢}$

∴ ص ← $\sqrt{(١٠)^2 + (١٠)^2}$

أى أن : ص ← ١٠ $\sqrt{٢}$

④ ∵ المنحنى يقطع محور السينات عند س = ٣

∴ المنحنى يمر بالنقطة (٣ ، ٠)

، ∵ الدالة كثيرة حدود

∴ لا تحتوى على فقرات أو فجوات

∴ نهـــا (س ← ٣) د (س) = صفر

⑤ ∵ المنحنى يقطع محور الصادات عند ص = ٢

∴ المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ٢)

، ∵ الدالة كثيرة حدود.

∴ لا تحتوى على فقرات أو فجوات.

∴ نهـــا (س ← ٠) د (س) = ٢

⑥ ∵ نهـــا (س ← ١) د (س)

= نهـــا (س ← ١⁻) د (س) = نهـــا (س ← ١⁺) د (س)

∴ ١ = −٢ + أ ∴ أ = ٣

⑦ ∵ نهـــا (س ← ١) د (س)

= نهـــا (س ← ١⁻) د (س) = نهـــا (س ← ١⁺) د (س)

∴ نهـــا (س ← ١) د (س) = −٢ + ١ = −٢

∴ جميع قيم أ ∈]−١ ، ٢]

تحقق أن نهـــا (س ← ٢) د (س) = −٢

∴ أكبر قيمة للعدد أ هى ٣

إجابات تمارين 13

١

① (ﺟ) ② (ب) ③ (ﺟ) ④ (ب)
⑤ (ب) ⑥ (ب) ⑦ (أ) ⑧ (ﺟ)
⑨ (أ) ⑩ (ﺟ) ⑪ (د) ⑫ (ب)

٢

① نهـــا (س ← ٥) $\frac{(س - ٥)(س + ٥)}{(س - ٥)}$ = نهـــا (س ← ٥) (س + ٥)

= ١٠

② نهـــا (س ← ٢) $\frac{(س - ٢)(س - ٥)}{(س - ٢)}$ = نهـــا (س ← ٢) (س − ٥)

= −٣

③ نهـــا (س ← ٠) $\frac{س^2}{س^2 (٢ س - ٢)}$ = نهـــا (س ← ٠) $\frac{١}{٢ س - ٢}$

= $-\frac{١}{٢}$

④ نهـــا (س ← ٢) $\frac{٥ (س - ٢)}{٤ (س - ٢)}$ = $\frac{٥}{٤}$

⑤ $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{٤(س - ٤)(س + ٤)}{(س - ٤)}$

$= \underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} ٤(س + ٤) = ٣٢$

⑥ $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{٢(س - ٤)}{(س - ٤)(س + ٣)}$

$= \underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{٢}{س + ٣} = \frac{٢}{٧}$

⑦ $\underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٣)(س + ١)}{(س - ٣)(س + ٣)}$

$= \underset{س \to -٣}{\text{نهـا}} \frac{س + ١}{س - ٣} = \frac{-٢}{-٦} = \frac{١}{٣}$

⑧ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ١)}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س}{س + ١} = \frac{٢}{٣}$

⑨ $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٤)(س + ١)}{(س - ٢)(س + ١)}$

$= \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س - ٤}{س - ٢} = \frac{٥}{٣}$

⑩ $\underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{(٢س - ١)(س - ٢)}{(٢س - ١)}$

$= \underset{س \to \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}} (س - ٢) = -\frac{٣}{٢}$

⑪ $\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \frac{-(س - ٩)}{(س - ٩)(س + ٩)}$

$= \underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \frac{-١}{س + ٩} = \frac{-١}{١٨}$

⑫ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(٣س + ٤)(س - ١)}{(س - ١)(س + ١)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٣س + ٤}{س + ١} = \frac{٧}{٢}$

⑬ $\underset{س \to \frac{٣}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{(٤س - ٣)(٤س + ٣)}{٢(٤س - ٣)}$

$= \underset{س \to \frac{٣}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{٤س + ٣}{٢} = ٣$

⑭ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(٢س + ١)(س - ٣)}{(٢س + ٣)(س - ٣)}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{٢س + ١}{٢س + ٣} = \frac{٧}{٩}$

⑮ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٣)(س + ٥)}{٥(س - ٣)(س + ٣)}$

$= \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س + ٥}{٥(س + ٣)} = \frac{٤}{١٥}$

⑯ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{٣(س - ٢)(س + ٢)}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{٣(س + ٢)} = \frac{١٢}{١٢} = ١$

٣

① $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢ - ٢)(س + ٢ + ٢)}{س(س + ١)}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{س + ٤}{س + ١} = ٤$

② $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٤س^٢ - ٤س}{٥س}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٤س(س - ١)}{٥س}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٤(س - ١)}{٥} = \frac{-٤}{٥}$

③ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٣ - ١)(س - ٣ + ١)}{(س - ٢)(٢س + ١)}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س - ٤}{٢س + ١} = \frac{-٢}{٥}$

④ $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢ + ١)[(س + ٢)^٢ - (س + ٢) + ١]}{٢س(س + ٣)}$

$= \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)^٢ - (س + ٢) + ١}{٢س} = \frac{-١}{٢}$

⑤ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س^٢ - ٤)(س^٢ + ٥)}{س - ٢}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٢)(س + ٢)(س^٢ + ٥)}{(س - ٢)}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} (س + ٢)(س^٢ + ٥) = ٣٦$

⑥ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٢)^٢(س + ٢)^٢}{(س - ٢)}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} (س - ٢)(س + ٢)^٢ =$ صفر

⑦ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٢(س - ١)}{(س - ١)^٥ + ٢(س - ١)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٢(س - ١)}{(س - ١)[(س - ١)^٤ + ٢]}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{٢}{(س - ١)^٤ + ٢} = ١$

⑧ $\underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{(س + ٢)}{(س + ٢)(س - ٢)(س^٢ + ٤)}$

$= \underset{س \to -٢}{\text{نهـا}} \frac{١}{(س - ٢)(س^٢ + ٤)}$

$= -\frac{١}{٣٢}$

⑨ $\underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \frac{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٤)}{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)}$

$= \underset{س \to ٩}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{س} + ٤}{\sqrt{س} + ٣} = \frac{٧}{٦}$

⑩ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{س} \times \frac{٢ - (٢ + س)}{٢(٢ + س)}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-س}{٢س(س + ٢)}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-١}{٢(س + ٢)} = \frac{-١}{٤}$

⑪ $\underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٣(س - ٢) - ٦(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ٣)}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٢)(س^٣ - ٦)}{(س - ٢)(س + ٣)}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نهـا}} \frac{س^٣ - ٦}{س + ٣} = \frac{٢}{٥}$

⑫ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{٥}{س} + \underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} \frac{س(س - ٣)}{س - ٣}$

$= \frac{٥}{٣} + ٣ = \frac{١٤}{٣}$

⑬ $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ - ٣س - ٤}{س^٢ - ١}$

$= \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{(س + ١)(س - ٤)}{(س + ١)(س - ١)}$

$= \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{س - ٤}{س - ١} = \frac{٥}{٢}$

⑭ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{١}{س - ١} - \frac{٣}{(س - ١)(س^٢ + س + ١)} \right)$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \left(\frac{س^٢ + س + ١ - ٣}{(س - ١)(س^٢ + س + ١)} \right)$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(س - ١)(س + ٢)}{(س - ١)(س^٢ + س + ١)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س + ٢}{س^٢ + س + ١} = ١$

٤

- باستخدام القسمة المطولة أو القسمة التركيبية في المسائل التالية نقسم كلاً من البسط والمقام على العامل الصفرى فنجد أن :

① $\underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} \frac{(س - ٤)(س^٢ + ٤س + ١)}{س - ٤}$

$= \underset{س \to ٤}{\text{نهـا}} (س^٢ + ٤س + ١) = ٣٣$

② $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{(س - ١)(س^٢ + س - ١)}{(س - ١)(س + ٢)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{س^٢ + س - ١}{س + ٢} = \frac{١}{٣}$

Scanned by CamScanner

③ $$\lim\limits_{س \to ٤} \frac{س(س-٤)(س^{٢}+٤س-٥)}{(س-٤)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٤} س(س^{٢}+٤س-٥) = ١٠٨$$

④ $$\lim\limits_{س \to -٢} \frac{(س+٢)(٢س^{٢}-س+٢)}{(س+٢)(س^{٢}-٢س+٤)}$$

$$= \lim\limits_{س \to -٢} \frac{٢س^{٢}-س+٢}{س^{٢}-٢س+٤} = \frac{١٢}{١٢} = ١$$

⑤ $$\lim\limits_{س \to -٢} \frac{(س+٢)^{٢}}{(س-٣)(س+٢)^{٢}}$$

$$= \lim\limits_{س \to -٢} \frac{١}{س-٣} = \frac{-١}{٥}$$

⑥ $$\lim\limits_{س \to ١} \frac{(س-١)^{٢}(س-٣)}{س(س-١)^{٢}}$$

$$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{س-٣}{س} = -٢$$

٥

① $$\lim\limits_{س \to ٩} \frac{(\sqrt{س}-٣)(\sqrt{س}+٣)}{(س-٩)(\sqrt{س}+٣)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٩} \frac{س-٩}{(س-٩)(\sqrt{س}+٣)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٩} \frac{١}{\sqrt{س}+٣} = \frac{١}{٦}$$

② $$\lim\limits_{س \to ٥} \frac{(\sqrt{س-١}-٢)(\sqrt{س-١}+٢)}{(س-٥)(\sqrt{س-١}+٢)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٥} \frac{س-١-٤}{(س-٥)(\sqrt{س-١}+٢)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٥} \frac{١}{\sqrt{س-١}+٢} = \frac{١}{٤}$$

③ $$\lim\limits_{س \to -١} \frac{س+١}{\sqrt{س+٥}-٢} \times \frac{\sqrt{س+٥}+٢}{\sqrt{س+٥}+٢}$$

$$= \lim\limits_{س \to -١} \frac{(س+١)(\sqrt{س+٥}+٢)}{س+٥-٤}$$

$$= \lim\limits_{س \to -١} (\sqrt{س+٥}+٢) = ٤$$

④ $$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٢-٢س}-\sqrt{٢})(\sqrt{٢-٢س}+\sqrt{٢})}{س(\sqrt{٢-٢س}+\sqrt{٢})}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٠} \frac{٢-٢س-٢}{س[\sqrt{٢-٢س}+\sqrt{٢}]}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٠} \frac{-٢}{\sqrt{٢-٢س}+\sqrt{٢}} = \frac{-١}{\sqrt{٢}}$$

⑤ $$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{٢س+٩}-٣)(\sqrt{٢س+٩}+٣)}{س(س+١)(\sqrt{٢س+٩}+٣)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٠} \frac{٢س+٩-٩}{س(س+١)(\sqrt{٢س+٩}+٣)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٠} \frac{٢}{(س+١)(\sqrt{٢س+٩}+٣)} = \frac{١}{٣}$$

⑥ $$\lim\limits_{س \to ٥} \frac{س(س-٥)}{(\sqrt{س+٤}-٣)} \times \frac{(\sqrt{س+٤}+٣)}{(\sqrt{س+٤}+٣)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٥} \frac{س(س-٥)(\sqrt{س+٤}+٣)}{س+٤-٩}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٥} س(\sqrt{س+٤}+٣) = ٣٠$$

⑦ $$\lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س+٢)(\sqrt{٥س-٦}+٢)}{(\sqrt{٥س-٦}-٢)(\sqrt{٥س-٦}+٢)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س+٢)(\sqrt{٥س-٦}+٢)}{٥س-٦-٤}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س+٢)(\sqrt{٥س-٦}+٢)}{٥(س-٢)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س+٢)(\sqrt{٥س-٦}+٢)}{٥} = ٦$$

⑧ $$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(\sqrt{١+س}-\sqrt{١-س})(\sqrt{١+س}+\sqrt{١-س})}{٢س(\sqrt{١+س}+\sqrt{١-س})}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٠} \frac{١+س-١+س}{٢س(\sqrt{١+س}+\sqrt{١-س})}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٠} \frac{١}{\sqrt{١+س}+\sqrt{١-س}} = \frac{١}{٢}$$

⑨ $$\lim\limits_{س \to ١} \frac{(س-١)(\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س})}{(\sqrt{٣س-٢}-\sqrt{س})(\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س})}$$

$$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{(س-١)(\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س})}{٣س-٢-س}$$

$$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{(س-١)(\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س})}{٢(س-١)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{\sqrt{٣س-٢}+\sqrt{س}}{٢} = ١$$

⑩ $$\lim\limits_{س \to -١} \frac{\sqrt{س^{٢}+٨}-٣}{س+١} \times \frac{\sqrt{س^{٢}+٨}+٣}{\sqrt{س^{٢}+٨}+٣}$$

$$= \lim\limits_{س \to -١} \frac{س^{٢}+٨-٩}{(س+١)(\sqrt{س^{٢}+٨}+٣)}$$

$$= \lim\limits_{س \to -١} \frac{(س-١)(س+١)}{(س+١)(\sqrt{س^{٢}+٨}+٣)}$$

$$= \lim\limits_{س \to -١} \frac{س-١}{\sqrt{س^{٢}+٨}+٣} = \frac{-١}{٣}$$

⑪ $$\lim\limits_{س \to ١} \frac{(١-س)(٢+\sqrt{س^{٢}+٣})}{(٢-\sqrt{س^{٢}+٣})(٢+\sqrt{س^{٢}+٣})}$$

$$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{(١-س)(٢+\sqrt{س^{٢}+٣})}{٤-س^{٢}-٣}$$

$$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{(١-س)(٢+\sqrt{س^{٢}+٣})}{(١-س)(١+س)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{٢+\sqrt{س^{٢}+٣}}{١+س} = ٢$$

⑫ $$\lim\limits_{س \to ٣} \frac{(\sqrt{س+١}-٢)(\sqrt{س+١}+٢)(\sqrt{س-٢}+١)}{(\sqrt{س-٢}-١)(\sqrt{س+١}+٢)(\sqrt{س-٢}+١)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٣} \frac{(س+١-٤)(\sqrt{س-٢}+١)}{(س-٢-١)(\sqrt{س+١}+٢)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٣} \frac{\sqrt{س-٢}+١}{\sqrt{س+١}+٢} = \frac{١}{٢}$$

⑬ $$\lim\limits_{س \to ٤} \frac{(\sqrt{٢٤-٥س}-٢)(\sqrt{٢٤-٥س}+٢)(٣+\sqrt{س+٥})}{(٣-\sqrt{س+٥})(\sqrt{٢٤-٥س}+٢)(٣+\sqrt{س+٥})}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٤} \frac{(٢٤-٥س-٤)(٣+\sqrt{س+٥})}{(٩-س-٥)(\sqrt{٢٤-٥س}+٢)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٤} \frac{٥(٤-س)(٣+\sqrt{س+٥})}{(٤-س)(\sqrt{٢٤-٥س}+٢)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٤} \frac{٥(٣+\sqrt{س+٥})}{\sqrt{٢٤-٥س}+٢} = \frac{٥\times٦}{٤} = ٧.٥$$

⑭ $$\lim\limits_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س+\sqrt{س+٦})}{(س-\sqrt{س+٦})(س+\sqrt{س+٦})}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س+\sqrt{س+٦})}{س^{٢}-س-٦}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٣} \frac{(س-٣)(س+\sqrt{س+٦})}{(س-٣)(س+٢)}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٣} \frac{س+\sqrt{س+٦}}{س+٢} = \frac{٦}{٥}$$

٦

$$\lim\limits_{س \to ٢} \frac{د(س)-٥}{س-٢} = ١$$ (لها وجود)

$\therefore$ $د(٢)-٥=٠$ $\therefore$ $د(٢)=٥$

$\therefore$ $\lim\limits_{س \to ٢} د(س) = د(٢) = ٥$

٧

$\because$ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س^{٢}} = ٥$

$\therefore$ $د(س) = س^{٢}\,(ر(س))$

① $\lim\limits_{س \to ٠} د(س) = $ صفر

② $$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{د(س)}{س} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{س^{٢}(ر(س))}{س}$$

$$= \lim\limits_{س \to ٠} س(ر(س))$$

$$= \lim\limits_{س \to ٠} س \times \lim\limits_{س \to ٠} ر(س) = ٠ \times ٥ = ٠$$

٨ $\lim\limits_{س \to -١} \frac{(س + ١)(س - أ)}{(س + ١)} = ٤$

$\therefore \lim\limits_{س \to -١} (س - أ) = ٤$

$\therefore -١ - أ = ٤ \qquad \therefore أ = -٥$

---

٩ $\because \lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٢ + أ س + ب}{س - ١}$ موجودة وتساوى ٥

، ∵ المقام = صفر عند س = ١

∴ البسط = صفر عند س = ١

$\therefore ١ + أ + ب = ٠$

$\therefore ب = -أ - ١$

$\therefore \lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٢ + أ س - أ - ١}{س - ١} = ٥$

$\therefore \lim\limits_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س + ١) + أ (س - ١)}{(س - ١)} = ٥$

$\therefore \lim\limits_{س \to ١} \frac{(س - ١)(س + ١ + أ)}{(س - ١)} = ٥$

$\therefore ٢ + أ = ٥ \qquad \therefore أ = ٣$ ومنها $ب = -٤$

---

١٠ $\lim\limits_{س \to ١٠٠} (٠,٢ س^٢ + ٤٠ س + ١٥٠)$

$= ٦١٥٠$ جنيهًا

١١

① (أ) ② (د) ③ (د) ④ (أ)

إرشادات لحل رقم ١١

① $\because س \left(د(س) + ١\right) = د(س) + س^٢$

$\therefore س\, د(س) + س = د(س) + س^٢$

$\therefore س\, د(س) - د(س) = س^٢ - س$

$\therefore (س - ١)\, د(س) = س (س - ١)$

$\therefore د(س) = \frac{س (س - ١)}{(س - ١)} = س$

حيث س ≠ ١

$\therefore \lim\limits_{س \to ١} د(س) = ١$

② $\because \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt{م س + ك} - ٣}{س}$

موجودة وتساوى ٢

، ∵ المقام = صفر عند س = ٠

∴ البسط = ٠ عندما س = ٠

$\therefore \sqrt{ك} = ٣ \qquad \therefore ك = ٩$

$\because \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt{م س + ٩} - ٣}{س} = ٢$

$\therefore \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\left(\sqrt{م س + ٩} - ٣\right)}{س} \times \frac{\left(\sqrt{م س + ٩} + ٣\right)}{\left(\sqrt{م س + ٩} + ٣\right)} = ٢$

$\lim\limits_{س \to ٠} \frac{م س + ٩ - ٩}{س \left(\sqrt{م س + ٩} + ٣\right)} = ٢$

$\therefore \lim\limits_{س \to ٠} \frac{م}{\sqrt{م س + ٩} + ٣} = ٢$

$\therefore \frac{م}{٦} = ٢ \qquad \therefore م = ١٢$

$\therefore \frac{م}{ك} = \frac{١٢}{٩} = \frac{٤}{٣}$

③ $\because ٢ \lim\limits_{س \to م} د(س)$

$- ٥ \lim\limits_{س \to م} هـ(س) = ١٠$ (١)

، $\lim\limits_{س \to م} د(س) + \lim\limits_{س \to م} هـ(س) = ٦$ (٢)

وبضرب المعادلة (٢) × ٥

$\therefore ٥ \lim\limits_{س \to م} د(س)$

$+ ٥ \lim\limits_{س \to م} هـ(س) = ٣٠$ (٣)

بحل (١) ، (٣)

$\therefore ٧ \lim\limits_{س \to م} د(س) = ٤٠$

$\therefore \lim\limits_{س \to م} د(س) = \frac{٤٠}{٧}$

وبالتعويض في (٢)

$\therefore \lim\limits_{س \to م} هـ(س) = ٦ - \frac{٤٠}{٧} = \frac{٢}{٧}$

$\therefore \lim\limits_{س \to م} \frac{د(س)}{هـ(س)} = \frac{\lim\limits_{س \to م} د(س)}{\lim\limits_{س \to م} هـ(س)} = \frac{\frac{٤٠}{٧}}{\frac{٢}{٧}}$

$= ٢٠$

④ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{٢ س^٢ - ن(س)}{س - ٢}$

$= \lim\limits_{س \to ٢} \frac{٢ س^٢ - ن(س) + ٨ - ٨}{س - ٢}$

$= \lim\limits_{س \to ٢} \frac{٢ س^٢ - ٨}{س - ٢} - \lim\limits_{س \to ٢} \frac{ن(س) - ٨}{س - ٢}$

$= \lim\limits_{س \to ٢} \frac{٢ (س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)}$

$- \lim\limits_{س \to ٢} \frac{ن(س) - ٨}{س - ٢}$

$= \lim\limits_{س \to ٢} ٢ (س + ٢) - \lim\limits_{س \to ٢} \frac{ن(س) - ٨}{س - ٢}$

$= ٨ - ٧ = ١$

١٢

① $\lim\limits_{س \to ٥} \left[\frac{(س - ٥)(س + ١)}{(س - ٥)(س - ١)}\right]^٢$

$= \lim\limits_{س \to ٥} \left[\frac{س + ١}{س - ١}\right]^٢ = \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ = \frac{٩}{٤}$

② $\lim\limits_{س \to ١} \sqrt{\frac{(س - ١)(س + ٣)}{س (س - ١)}}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \sqrt{\frac{س + ٣}{س}} = \sqrt{٤} = ٢$

③ $\lim\limits_{س \to \sqrt{٢}} \frac{\left(س - \sqrt{٢}\right)\left(س + \sqrt{٢}\right)}{\left(س - \sqrt{٢}\right)\left(س + ٢\sqrt{٢}\right)}$

$= \lim\limits_{س \to \sqrt{٢}} \frac{س + \sqrt{٢}}{س + ٢\sqrt{٢}} = \frac{٢\sqrt{٢}}{٣\sqrt{٢}} = \frac{٢}{٣}$

④ بالضرب بسطًا ومقامًا في $(- س^٣)$

$\lim\limits_{س \to ١} \frac{٧ س^٣ - ٢ س^٢ - ٥}{٤ س^٣ - ٣ س - ١}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{(س - ١)(٧ س^٢ + ٥ س + ٥)}{(س - ١)(٤ س^٢ + ٤ س + ١)}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{٧ س^٢ + ٥ س + ٥}{٤ س^٢ + ٤ س + ١} = \frac{١٧}{٩}$

⑤ $\lim\limits_{ظاس \to ٢} \frac{(ظاس - ٢)(ظاس + ١)}{(ظاس - ٢)(ظاس - ١)}$

$= \lim\limits_{ظاس \to ٢} \frac{ظاس + ١}{ظاس - ١} = ٣$

⑥ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(جتاس - ١)(جتاس - ٤)}{-(جتاس + ١)(جتاس - ١)}$

$= \lim\limits_{س \to ٠} \frac{جتاس - ٤}{-(جتاس + ١)} = \frac{٣}{٢}$

⑦ $\lim\limits_{(س - ١) \to ٧} \frac{س - ٨}{س^٢ - ٦٤}$

$= \lim\limits_{س \to ٨} \frac{س - ٨}{(س - ٨)(س + ٨)}$

$= \lim\limits_{س \to ٨} \frac{١}{س + ٨} = \frac{١}{١٦}$

⑧ $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^٢ + ٣ - ٤ - ٢ (س^٢ - س)}{(س^٢ - س)\left(\sqrt{س^٢ + ٣} - ٢\right)}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{-(س - ١)^٢}{س (س - ١)\left(\sqrt{س^٢ + ٣} - ٢\right)}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{-(س - ١)}{س \left(\sqrt{س^٢ + ٣} - ٢\right)} \times \frac{\sqrt{س^٢ + ٣} + ٢}{\sqrt{س^٢ + ٣} + ٢}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{-(س - ١)\left(\sqrt{س^٢ + ٣} + ٢\right)}{س (س^٢ - ١)}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{-\left(\sqrt{س^٢ + ٣} + ٢\right)}{س (س + ١)} = \frac{-٤}{٢} = -٢$

اجابات تمارين 14

١

① (د) ② (د) ③ (أ) ④ (أ)

⑤ (ب) ⑥ (د) ⑦ (جـ)

٢

① $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^٣ - ٢^٣}{س - ٢} = ٣ (٢)^٢ = ١٢$

② $\underset{س \to -٥}{\text{نها}} \frac{س^٤ - (-٥)^٤}{س - (-٥)} = \frac{٤}{١} (-٥)^{٤-١}$

$= -٥٠٠$

③ $\underset{س \to أ}{\text{نها}} \frac{س^٥ - أ^٥}{س - أ} = ٥ أ^٤$

④ $\underset{س \to -٣}{\text{نها}} \frac{س^٤ - (-٣)^٤}{س^٥ - (-٣)^٥} = \frac{٤}{٥} (-٣)^{٤-٥} = \frac{-٤}{١٥}$

⑤ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^٦ - (٢)^٦}{س^٧ - (٢)^٧} = \frac{٦}{٧} (٢)^{٦-٧} = \frac{٣}{٧}$

⑥ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{٢(س^٦ - ٦٤)}{س^٢ - ٤}$

$= ٢ \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^٦ - (٢)^٦}{س^٢ - (٢)^٢}$

$= ٢ \times \frac{٦}{٢} (٢)^{٦-٢} = ٩٦$

⑦ $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{س^٦ - ٦٤}{٢(س + ٢)}$

$= \frac{١}{٢} \underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{س^٦ - (-٢)^٦}{س - (-٢)}$

$= \frac{١}{٢} \times ٦ \times (-٢)^٥ = -٦٤$

⑧ $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{س(س^٩ + ١)}{س(س^٦ - ١)}$

$= \underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{س^٩ - (-١)^٩}{س^٦ - (-١)^٦}$

$= \frac{٩}{٦} (-١)^٣ = -\frac{٣}{٢}$

⑨ $-١ \times \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^٩ - (١)^٩}{س^٧ - (١)^٧}$

$= -١ \times \frac{٩}{٧} (١)^{٩-٧} = \frac{-٩}{٧}$

⑩ $\underset{٢س \to -١}{\text{نها}} \frac{(٢س)^٥ - (-١)^٥}{(٢س)^٦ - (-١)^٦} = \frac{٥}{٦} (-١)^{-١}$

$= -\frac{٥}{٦}$

⑪ $\underset{٣س \to -٢}{\text{نها}} \frac{(٣س)^٥ - (-٢)^٥}{(٣س)^٣ - (-٢)^٣}$

$= \frac{٥}{٣} (-٢)^{٥-٣} = \frac{٢٠}{٣}$

⑫ $\underset{٢س \to ٣}{\text{نها}} \frac{س(١٦ س^٤ - ٨١)}{س^٢ (٢س - ٣)}$

$= \underset{س \to \frac{٣}{٢}}{\text{نها}} \frac{١}{س} \times \underset{٢س \to ٣}{\text{نها}} \frac{(٢س)^٤ - (٣)^٤}{٢س - ٣}$

$= \frac{٢}{٣} \times ٤ (٣)^٣ = ٧٢$

٣

① $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{-٧} - (٢)^{-٧}}{س - ٢} = -٧ (٢)^{-٨} = \frac{-٧}{٢٥٦}$

② $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{س^{-٤} - (-١)^{-٤}}{س^{-١٨} - (-١)^{-١٨}} = \frac{-٤}{-١٨} (-١)^{١٤} = \frac{٢}{٩}$

③ $\underset{س \to \sqrt{٢}}{\text{نها}} \frac{س^٧ - (\sqrt{٢})^٧}{س^٢ - (\sqrt{٢})^٢} = \frac{٧}{٢} (\sqrt{٢})^٥$

$= ١٤ \sqrt{٢}$

④ $\underset{س \to -\sqrt{٢}}{\text{نها}} \frac{س^٨ - (-\sqrt{٢})^٨}{س^٥ - (-\sqrt{٢})^٥} = \frac{٨}{٥} (-\sqrt{٢})^٣$

$= \frac{-١٦ \sqrt{٢}}{٥}$

⑤ $\underset{\sqrt{٢}س \to -٣}{\text{نها}} \frac{(\sqrt{٢} س)^٦ - (-٣)^٦}{\sqrt{٢} س - (-٣)} = ٦ (-٣)^٥$

$= -١٤٥٨$

⑥ $\underset{جا س \to \frac{١}{٢}}{\text{نها}} \frac{جا^٣ س - (\frac{١}{٢})^٣}{جا س - (\frac{١}{٢})} = ٣ (\frac{١}{٢})^٢ = \frac{٣}{٤}$

⑦ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{-٥} - (٢)^{-٥}}{س^{-٧} - (٢)^{-٧}} = \frac{-٥}{-٧} (٢)^٢ = \frac{٢٠}{٧}$

⑧ $٨ \times \underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{س^{-٣} - (-\frac{١}{٨})}{س^{-٨} - \frac{١}{٢٥٦}}$

$= ٨ \times \underset{س \to -٢}{\text{نها}} \frac{س^{-٣} - (-٢)^{-٣}}{س^{-٨} - (-٢)^{-٨}}$

$= ٨ \times \frac{-٣}{-٨} (-٢)^٥ = -٩٦$

⑨ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{-٨} - (٢)^{-٨}}{س - ٢} = \frac{-٨}{١} \times (٢)^{-٨-١}$

$= \frac{-١}{٦٤}$

⑩ $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{س^{\frac{٧}{٢}} - ٤^{\frac{٧}{٢}}}{س^{\frac{٥}{٢}} - ٤^{\frac{٥}{٢}}} = \frac{٧}{٥} \times ٤ = \frac{٢٨}{٥}$

⑪ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{\frac{١}{٧}} - ١^{\frac{١}{٧}}}{س - ١} = \frac{١}{٧}$

⑫ $\underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{س^{\frac{٣}{٢}} - (٤)^{\frac{٣}{٢}}}{س^٢ - (٤)^٢} = \frac{٣}{٤} (٤)^{-\frac{١}{٢}} = \frac{٣}{٨}$

⑬ $\underset{س \to ١٦}{\text{نها}} \frac{س^{\frac{٧}{٤}} - ١٦^{\frac{٧}{٤}}}{س - ١٦} = \frac{\frac{٧}{٤}}{١} \times (١٦)^{\frac{٧}{٤} - ١} = ١٤$

⑭ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{\frac{٦}{٥}} - (١)^{\frac{٦}{٥}}}{س^٢ - (١)^٢} = \frac{٣}{٥}$

⑮ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{\frac{١}{٢}} [س^{١٠} - ١]}{س^{\frac{٣}{٢}} [س^٤ - ١]}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} س^{-١} \times \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{١٠} - (١)^{١٠}}{س^٤ - (١)^٤}$

$= ١ \times \frac{١٠}{٤} = \frac{٥}{٢}$

⑯ $\frac{١}{٢} \underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{س^٤ - ٢٥٦}{س - ٤}$

$= \frac{١}{٢} \underset{س \to ٤}{\text{نها}} \frac{س^٤ - ٤^٤}{س - ٤} = \frac{١}{٢} \times ٤ (٤)^٣ = ١٢٨$

⑰ $\underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{س^٤} (س^٨ - ١)}{\frac{١}{س^٣} (س^٦ - ١)}$

$= \underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{١}{س} \times \underset{س \to -١}{\text{نها}} \frac{س^٨ - (-١)^٨}{س^٦ - (-١)^٦}$

$= -١ \times \frac{٨}{٦} (-١)^٢ = \frac{-٤}{٣}$

⑱ $\underset{٢س \to ١}{\text{نها}} \frac{\frac{٥}{١٦} [١٦ س^٤ - ١]}{٢س - ١}$

$= \frac{٥}{١٦} \underset{٢س \to ١}{\text{نها}} \frac{(٢س)^٤ - (١)^٤}{٢س - ١}$

$= \frac{٥}{١٦} \times ٤ (١)^٣ = \frac{٥}{٤}$

⑲ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{١٠} - (٢)^{١٠}}{(س - ٢)(س - ١)}$

$= \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{١}{س - ١} \times \underset{س \to ٢}{\text{نها}} \frac{س^{١٠} - (٢)^{١٠}}{س - ٢}$

$= ١ \times ١٠ (٢)^٩ = ٥١٢٠$

⑳ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{١٧} - (١)^{١٧}}{(٣س + ٥)(س - ١)}$

$= \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{١}{٣س + ٥} \times \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{س^{١٧} - (١)^{١٧}}{س - ١}$

$= \frac{١}{٨} \times ١٧ (١)^{١٦} = \frac{١٧}{٨}$

٤

① $\underset{(١ + س) \to ١}{\text{نها}} \frac{(١ + س)^{١٠} - (١)^{١٠}}{(١ + س)^٧ - (١)^٧}$

$= \frac{١٠}{٧} (١)^٣ = \frac{١٠}{٧}$

② $\underset{(س - ٥) \to ١}{\text{نها}} \frac{(س - ٥)^٧ - ١^٧}{(س - ٥) - ١} = ٧ (١)^٦ = ٧$

③ $\underset{(س + ٣) \to ١}{\text{نها}} \frac{(س + ٣)^٥ - (١)^٥}{(س + ٣) - (١)} = ٥ (١)^٤ = ٥$

④ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{(س + ٢)^٥ - ٢^٥}{س} = ٥ (٢)^٤ = ٨٠$

⑤ $\frac{١}{٦} \underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \frac{(٣ + هـ)^٤ - ٣^٤}{هـ}$

$= \frac{١}{٦} \times ٤ (٣)^٣ = ١٨$

⑥ $٤ \underset{هـ \to ٠}{\text{نها}} \frac{(١ + ٤ هـ)^٨ - (١)^٨}{٤ هـ}$

$= ٤ \underset{(١ + ٤ هـ) \to ١}{\text{نها}} \frac{(١ + ٤ هـ)^٨ - (١)^٨}{(١ + ٤ هـ) - (١)}$

$= ٤ \times ٨ (١)^٧ = ٣٢$

⑦ $\frac{-2}{5}\lim_{س\to 0}\frac{(1-2س)^5-1^5}{-2س}$

$=\frac{-2}{5}\lim_{(1-2س)\to 1}\frac{(1-2س)^5-1^5}{(1-2س)-1}$

$=\frac{-2}{5}\times 5(1)^4=-2$

⑧ $3\lim_{هـ\to 0}\frac{(س+2هـ)^5-س^5}{2هـ}$

$=3\lim_{(س+2هـ)\to س}\frac{(س+2هـ)^5-س^5}{(س+2هـ)-س}$

$=3\times 5س^4=15س^4$

⑨ $\frac{-2}{51}\lim_{هـ\to 0}\frac{(س-2هـ)^{17}-س^{17}}{-2هـ}$

$=\frac{-2}{51}\lim_{(س-2هـ)\to س}\frac{(س-2هـ)^{17}-س^{17}}{(س-2هـ)-س}$

$=\frac{-2}{51}\times 17س^{16}=-\frac{2}{3}س^{16}$

⑩ $3\lim_{(3س+2)\to -1}\frac{(3س+2)^9-(-1)^9}{(3س+2)-(-1)}$

$=3\times 9(-1)^8=27$

⑪ $\frac{3}{2}\lim_{س\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+2س}-1}{2س}$

$=\frac{3}{2}\lim_{(1+2س)\to 1}\frac{(1+2س)^{\frac{1}{3}}-(1)^{\frac{1}{3}}}{(1+2س)-(1)}$

$=\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}(1)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$

⑫ $\lim_{س\to 1}\frac{\sqrt[3]{26+س}-3}{26+س-27}$

$=\lim_{(26+س)\to 27}\frac{(26+س)^{\frac{1}{3}}-(27)^{\frac{1}{3}}}{(26+س)-(27)}$

$=\frac{1}{3}(27)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{27}$

⑬ $\lim_{(س+3)\to 8}\frac{(س+3)^{\frac{1}{3}}-(8)^{\frac{1}{3}}}{(س+3)-8}$

$=\frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{12}$

⑭ $\lim_{س\to 7}\frac{(س+25)^{\frac{1}{5}}-(32)^{\frac{1}{5}}}{(س+25)-32}$

$=\frac{1}{5}(32)^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{80}$

⑮ $\lim_{(س-4)\to -2}\frac{(س-4)^5-(-2)^5}{(س-4)-(-2)}$

$=\left(\frac{5}{1}\right)\times(-2)^{5-1}=80$

⑯ $\lim_{س\to -2}\frac{(س+3)^5-1}{(س-2)(س+2)}$

$=\lim_{س\to -2}\frac{1}{س-2}$

$\times\lim_{(س+3)\to 1}\frac{(س+3)^5-1^5}{(س+3)-1}$

$=-\frac{1}{4}\times 5\times(1)^4=-\frac{5}{4}$

⑰ $\lim_{س\to 1}\frac{س^{19}-1+س^8-1}{س-1}$

$=\lim_{س\to 1}\frac{س^{19}-(1)^{19}}{س-1}$

$+\lim_{س\to 1}\frac{س^8-(1)^8}{س-1}$

$=19(1)^{18}+8(1)^7=27$

⑱ $\lim_{س\to -1}\frac{س^7+1+س^9+1}{س+1}$

$=\lim_{س\to -1}\frac{س^7-(-1)^7}{س-(-1)}$

$+\lim_{س\to -1}\frac{س^9-(-1)^9}{س-(-1)}$

$=7(-1)^6+9(-1)^8=16$

⑲ $\lim_{س\to 1}\frac{\sqrt{س}-1+\sqrt[3]{س}-1}{س-1}$

$=\lim_{س\to 1}\frac{(س)^{\frac{1}{2}}-(1)^{\frac{1}{2}}}{س-1}$

$+\lim_{س\to 1}\frac{(س)^{\frac{1}{3}}-(1)^{\frac{1}{3}}}{س-1}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$

⑳ $\lim_{س\to 2}\frac{س^5-32+س^2-4}{س-2}$

$=\lim_{س\to 2}\frac{س^5-2^5}{س-2}+\lim_{س\to 2}\frac{س^2-2^2}{س-2}$

$=5(2)^4+2(2)^1=84$

㉑ $\lim_{س\to 0}\frac{(س-2)^5-2^5}{س(س-4)}$

$=\lim_{س\to 0}\frac{1}{س}\times\lim_{(س-2)\to 2}\frac{(س-2)^5-2^5}{(س-2)-2}$

$=\frac{1}{5}\times\frac{5}{1}(2)^{5-1}=16$

㉒ $\lim_{س\to 0}\frac{(س+2)^6-64}{س(س+16)}$

$=\lim_{س\to 0}\frac{1}{س+16}$

$\times\lim_{س\to 0}\frac{(س+2)^6-(2)^6}{س}$

$=\frac{1}{16}\times 6(2)^5=12$

㉓ $\lim_{س\to 0}\frac{1}{2(س-3)}$

$\times 2\times\lim_{(2س-3)\to -3}\frac{(2س-3)^5-(-3)^5}{(2س-3)-(-3)}$

$=-\frac{1}{6}\times 2\times 5(-3)^4=-135$

٥

① (ب) ② (جـ) ③ (ب) ④ (د) ⑤ (د)

٦ $\because \lim_{س\to أ}\frac{س^{12}-أ^{12}}{س^{10}-أ^{10}}=30$

$\therefore \frac{12}{10}(أ)^2=30$ $\therefore أ^2=25$

$\therefore أ=\pm 5$

٧ $\lim_{س\to -1}\frac{س^{15}-(-1)^{15}}{س-(-1)}=15(-1)^{14}=15$

$\because \lim_{س\to ك}\frac{س^5-ك^5}{س^3-ك^3}=\frac{5}{3}(ك)^2$

$\therefore \frac{5}{3}ك^2=15$ $\therefore ك=\pm 3$

٨ $\because$ النهاية موجودة $\therefore 64=2^{ن}$

$\therefore ن=6$ $\therefore$ النهاية $=\frac{ن}{?}\times 2^{ن-1}$ [illegible]

$\therefore ل=192$

٩ $\lim_{س\to 2}\frac{[illegible]}{س-2}$

$=\lim_{س\to 2}\frac{\frac{1}{س^4}-\frac{1}{2^4}}{س-2}$

$=\lim_{س\to 2}\frac{س^{-4}-2^{-4}}{س-2}=-4(2)^{-5}=\frac{-1}{8}$

١٠

① $\lim_{س\to 3}\frac{س^5-3^5}{س^7-3^7}+\lim_{س\to 3}\frac{س^4-3^4}{س^9-3^9}$

$=\frac{5}{7}(3)^{-2}+\frac{4}{9}(3)^{-5}=$ [illegible]

② $\lim_{س\to 2}\left(\frac{س-2}{س^2-4}\times\frac{س^5-243}{س-3}\right)$

$=\lim_{س\to 2}\frac{1}{س+2}\times\lim_{س\to 3}\frac{س^5-3^5}{س-3}$

$=\frac{1}{4}\times 5\times 3^4=81$

③ $\left(\lim_{س\to -3}\frac{س^5-(-3)^5}{س^3-(-3)^3}\right)^2=\left[\frac{5}{3}(-3)^2\right]^2=225$

④ $\lim_{س\to 1}\frac{(س^{25}-1)^2}{(س-1)^2}=\left(\lim_{س\to 1}\frac{س^{25}-1}{س-1}\right)^2$

$=\left(\lim_{س\to 1}\frac{س^{25}-(1)^{25}}{س-(1)}\right)^2$

$=\left(25(1)^{24}\right)^2=625$

⑤ $\lim_{س\to 1}\frac{(س^6-1)^2}{(س-1)^2}=\left[\lim_{س\to 1}\frac{س^6-(1)^6}{س-(1)}\right]^2$

$=\left[6(1)^5\right]^2=36$

⑥ $\lim_{س\to 2}\left[\frac{(س^5-32)^2}{(س^3-8)^2}\times\frac{س^5-32}{س^8-256}\right]$

$=\left(\lim_{س\to 2}\frac{س^5-32}{س^3-8}\right)^2\times\lim_{س\to 2}\frac{س^5-32}{س^8-256}$

$=\left(\lim_{س\to 2}\frac{س^5-2^5}{س^3-2^3}\right)^2\times\lim_{س\to 2}\frac{س^5-2^5}{س^8-2^8}$

$=\left[\frac{5}{3}(2)^2\right]^2\times\frac{5}{8}(2)^{-3}=$ [illegible]

⑦ $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{\frac{١}{٣}} - (١)^{\frac{١}{٣}}}{س - ١}$

$\times \lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{\frac{٢}{٥}} - (١)^{\frac{٢}{٥}}}{س - ١} = \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٢}{١٥}$

⑧ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(١ - س)^{١٥} \left[\left(\frac{١ + س}{١ - س} \right)^{١٥} - ١ \right]}{(١ - س)^{٩} \left[\left(\frac{١ + س}{١ - س} \right)^{٩} - ١ \right]}$

$= \lim\limits_{س \to ٠} (١ - س)^{٦}$

$\times \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\left(\frac{١ + س}{١ - س} \right)^{١٥} - ١}{\left(\frac{١ + س}{١ - س} \right)^{٩} - ١}$

$= ١ \times \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\left(\frac{١ + س}{١ - س} \right)^{١٥} - ١}{\left(\frac{١ + س}{١ - س} \right)^{٩} - ١}$

$\because س \to ٠ \qquad \therefore \frac{١ + س}{١ - س} \to ١$

$\therefore \lim\limits_{\left(\frac{١ + س}{١ - س} \right) \to ١} \frac{\left(\frac{١ + س}{١ - س} \right)^{١٥} - (١)^{١٥}}{\left(\frac{١ + س}{١ - س} \right)^{٩} - (١)^{٩}}$

$= \frac{١٥}{٩} (١)^{٦} = \frac{٥}{٣}$

⑨ $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{١٢} - ١}{س^{٢}(س - ١) + (س - ١)}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{١٢} - ١}{(س - ١)(س^{٢} + ١)}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{١}{س^{٢} + ١} \times \lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{١٢} - (١)^{١٢}}{س - ١}$

$= \frac{١}{٢} \times ١٢ (١)^{١١} = ٦$

١١

① $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{\frac{١}{٢}} (س - ١)}{س^{\frac{١}{٢}} (س^{٥} - ١)}$

$= \lim\limits_{س \to ١} \frac{س - ١}{س^{٥} - ١^{٥}} = \frac{١}{٥} (١)^{-٤} = \frac{١}{٥}$

② $\frac{٥}{٧} \lim\limits_{س \to ٠} \frac{(١ + ٥س)^{١٠} - ١}{٥س}$

$\times \lim\limits_{س \to ٠} \frac{٧س}{(١ + ٧س)^{٨} - ١}$

$= \frac{٥}{٧} \lim\limits_{(١ + ٥س) \to ١} \frac{(١ + ٥س)^{١٠} - (١)^{١٠}}{(١ + ٥س) - (١)}$

$\times \lim\limits_{(١ + ٧س) \to ١} \frac{(١ + ٧س) - ١}{(١ + ٧س)^{٨} - (١)^{٨}}$

$= \frac{٥}{٧} \times ١٠ (١)^{٩} \times \frac{١}{٨} (١)^{-٧} = \frac{٢٥}{٢٨}$

③ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٣]{س + ٨} - ٢}{س}$

$\times \lim\limits_{س \to ٠} \frac{س}{(س + ٣)^{٥} - ٢٤٣}$

$= \lim\limits_{(س + ٨) \to ٨} \frac{(س + ٨)^{\frac{١}{٣}} - (٨)^{\frac{١}{٣}}}{(س + ٨) - (٨)}$

$\times \lim\limits_{(س + ٣) \to ٣} \frac{(س + ٣) - (٣)}{(س + ٣)^{٥} - (٣)^{٥}}$

$= \frac{١}{٣} (٨)^{-\frac{٢}{٣}} \times \frac{١}{٥} (٣)^{-٤} = \frac{١}{٤٨٦٠}$

④ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{٢س - ٣} - ١}{(٢س - ٤)}$

$\times \lim\limits_{س \to ٢} \frac{٢س - ٤}{\sqrt[٥]{٣س - ٥} - ١}$

$= \lim\limits_{(٢س - ٣) \to ١} \frac{(٢س - ٣)^{\frac{١}{٣}} - (١)^{\frac{١}{٣}}}{(٢س - ٣) - ١}$

$\times \frac{٢}{٣} \lim\limits_{(٣س - ٥) \to ١} \frac{(٣س - ٥) - ١}{(٣س - ٥)^{\frac{١}{٥}} - (١)^{\frac{١}{٥}}}$

$= \frac{١}{٣} \times \frac{٢}{٣} \times ٥ (١)^{\frac{٤}{٥}} = \frac{١٠}{٩}$

⑤ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س^{٢} - ٣)^{٥} - ١}{(س - ٢)(س + ٢)} \times (س + ٢)$

$= \lim\limits_{(س^{٢} - ٣) \to ١} \frac{(س^{٢} - ٣)^{٥} - (١)^{٥}}{(س^{٢} - ٣) - ١}$

$\times \lim\limits_{س \to ٢} (س + ٢) = ٥ (١)^{٤} \times ٤ = ٢٠$

⑥ $\lim\limits_{س \to -١} \frac{(٤س + ٥)^{٦} - ١ + ٧س + ٧}{س + ١}$

$= \lim\limits_{س \to -١} \frac{(٤س + ٥)^{٦} - ١}{س + ١}$

$+ \lim\limits_{س \to -١} \frac{٧س + ٧}{س + ١}$

$= ٤ \lim\limits_{س \to -١} \frac{(٤س + ٥)^{٦} - ١}{٤س + ٤}$

$+ \lim\limits_{س \to -١} ٧ \left(\frac{س + ١}{س + ١} \right)$

$= ٤ \lim\limits_{(٤س + ٥) \to ١} \frac{(٤س + ٥)^{٦} - (١)^{٦}}{(٤س + ٥) - (١)} + ٧$

$= ٤ \times ٦ (١)^{٥} + ٧ = ٣١$

⑦ $\lim\limits_{س \to ١} \frac{(٥س - ٤)^{١٠} - ١}{س - ١}$

$+ \lim\limits_{س \to ١} \frac{٤س - ٤}{س - ١}$

$= ٥ \lim\limits_{(٥س - ٤) \to ١} \frac{(٥س - ٤)^{١٠} - (١)^{١٠}}{(٥س - ٤) - ١}$

$+ \lim\limits_{س \to ١} \frac{٤(س - ١)}{(س - ١)}$

$= ٥ \times ١٠ (١)^{٩} + ٤ = ٥٤$

⑧ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٥]{س + ١} - ١ - \sqrt[٤]{س + ١} + ١}{س}$

$= \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٥]{س + ١} - ١}{س}$

$- \lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt[٤]{س + ١} - ١}{س}$

$= \lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س + ١)^{\frac{١}{٥}} - (١)^{\frac{١}{٥}}}{س}$

$- \lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س + ١)^{\frac{١}{٤}} - (١)^{\frac{١}{٤}}}{س}$

$= \frac{١}{٥} (١)^{-\frac{٤}{٥}} - \frac{١}{٤} (١)^{-\frac{٣}{٤}} = \frac{-١}{٢٠}$

⑨ $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س + ١)^{\frac{١}{٥}} - ١ - (س + ١)^{٧} + ١}{س}$

$= \lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س + ١)^{\frac{١}{٥}} - (١)^{\frac{١}{٥}}}{س}$

$- \lim\limits_{س \to ٠} \frac{(س + ١)^{٧} - (١)^{٧}}{س}$

$= \frac{١}{٥} - ٧ = -٦\frac{٤}{٥}$

⑩ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{٥\sqrt{س - ١} - ٥}{س - ٢}$

$+ \lim\limits_{س \to ٢} \frac{\sqrt[٣]{س - ١} - ١}{س - ٢}$

$= ٥ \lim\limits_{(س - ١) \to ١} \frac{(س - ١)^{\frac{١}{٢}} - (١)^{\frac{١}{٢}}}{(س - ١) - (١)}$

$+ \lim\limits_{(س - ١) \to ١} \frac{(س - ١)^{\frac{١}{٣}} - (١)^{\frac{١}{٣}}}{(س - ١) - (١)}$

$= \frac{٥}{٢} + \frac{١}{٣} = \frac{١٧}{٦}$

⑪ $\lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{٧} - (١)^{٧}}{س - ١} + \lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{٩} - (١)^{٩}}{س - ١}$

$+ \lim\limits_{س \to ١} \frac{س^{١١} - (١)^{١١}}{س - ١} = ٧ + ٩ + ١١ = ٢٧$

⑫ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{٤}(س - ١)^{٦} - س^{٤} + س^{٤} - ١٦}{س - ٢}$

$= \lim\limits_{س \to ٢} س^{٤} \left[\frac{(س - ١)^{٦} - ١}{س - ٢} \right]$

$+ \lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{٤} - ١٦}{س - ٢}$

$= \left(\lim\limits_{س \to ٢} س^{٤} \right) \left(\lim\limits_{(س - ١) \to ١} \frac{(س - ١)^{٦} - (١)^{٦}}{(س - ١) - ١} \right)$

$+ \lim\limits_{س \to ٢} \frac{س^{٤} - ٢^{٤}}{س - ٢}$

$= ١٦ \times ٦ (١)^{٥} + ٤ (٢)^{٣} = ١٢٨$

⑬ $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٥ \sqrt[٣]{\text{س} + ٦} - ٢\,\text{س}^٥ + ٢\,\text{س}^٥ - ٦٤}{\text{س} - ٢}$

$= \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٥ [\sqrt[٣]{\text{س} + ٦} - ٢]}{\text{س} - ٢} + \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{٢(\text{س}^٥ - ٣٢)}{\text{س} - ٢}$

$= (\lim_{\text{س} \to ٢} \text{س}^٥)\left(\lim_{(\text{س}+٦) \to ٨} \frac{(\text{س} + ٦)^{\frac{١}{٣}} - (٨)^{\frac{١}{٣}}}{(\text{س} + ٦) - (٨)}\right) + ٢ \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^٥ - ٢^٥}{\text{س} - ٢}$

$= ٢^٥ \times \frac{١}{٣} \times (٨)^{\frac{١}{٣} - ١} + ٢ \times ٥ \times ٢^{٥ - ١}$

$= ١٦٢ \frac{٢}{٣}$

إجابات تمارين 15

١

① بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٢ - \frac{٥}{\text{س}}}{٣ + \frac{٨}{\text{س}}} = \frac{٢}{٣}$

② بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٢$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{٢}{\text{س}} - \frac{٥}{\text{س}^٢}}{٢ + \frac{٨}{\text{س}^٢}} = \text{صفر}$

③ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٢\,\text{س} - \frac{٥}{\text{س}}}{٣ + \frac{٨}{\text{س}}} = \infty$

④ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{٤}{\text{س}} - ٢}{٣ - \frac{١}{\text{س}}} = \frac{-٢}{٣}$

⑤ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٢$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{٥}{\text{س}^٢} - \frac{٦}{\text{س}} - ٣}{٢ + \frac{١}{\text{س}} + \frac{٤}{\text{س}^٢}} = \frac{-٣}{٢}$

⑥ عند س ← $-\infty$ فإن |س| = س

$\therefore \lim_{\text{س} \to -\infty} \frac{\text{س}^٢ - ٢}{\text{س}^٢ + ١}$

بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٢$

$\lim_{\text{س} \to -\infty} \frac{١ - \frac{٢}{\text{س}^٢}}{١ + \frac{١}{\text{س}^٢}} = ١$

⑦ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٢$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{٦}{\text{س}^٢} - ٤}{\frac{٢}{\text{س}^٢} - ٧} = \frac{-٤}{-٧} = \frac{٤}{٧}$

⑧ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٥$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٤ + \frac{٥}{\text{س}^٥}}{٨ + \frac{١}{\text{س}} - \frac{٢}{\text{س}^٥}} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

⑨ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٣$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{٧}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^٣}}{٤ - \frac{٨}{\text{س}^٢} + \frac{١}{\text{س}^٣}} = \frac{\text{صفر}}{٤} = \text{صفر}$

⑩ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٤$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٥\,\text{س}^٢ + \frac{٢}{\text{س}^٢} - \frac{١}{\text{س}^٤}}{٦ + \frac{١٣}{\text{س}^٤}} = \frac{\infty}{٦} = \infty$

⑪ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^{١٤}$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{٥}{\text{س}^{١٤}} - \frac{٧}{\text{س}^٦} + ٣}{\frac{٧}{\text{س}^{١٤}} - ٦ + \frac{٢}{\text{س}^٨}} = -\frac{٣}{٦} = -\frac{١}{٢}$

⑫ $\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{٧}{\text{س}^٢} + \frac{٢}{\text{س}} - ٣\right) = -٣$

⑬ $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\frac{٥}{\text{س}^٣} + \frac{٤}{\text{س}^٢} - ٣}{\frac{٧}{\text{س}^٣} - \frac{٢}{\text{س}^٢} + ٨} = \frac{-٣}{٨}$

⑭ عند س ← ∞ فإن $|٢\,\text{س}|^٣ = (٢\,\text{س})^٣$

$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٥\,\text{س}^٣ - ٤\,\text{س}^٢ + ٢}{٧ - \text{س} + ٨\,\text{س}^٣}$

بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٣$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٥ - \frac{٤}{\text{س}} + \frac{٢}{\text{س}^٣}}{\frac{٧}{\text{س}^٣} - \frac{١}{\text{س}^٢} + ٨} = \frac{٥}{٨}$

⑮ $\lim_{\text{س} \to \infty} (\text{س}^٣ + ٥\,\text{س}^٢ + ١)$

$= \infty + \infty + ١ = \infty$

⑯ $\lim_{\text{س} \to \infty} [\sqrt{\text{س}^٢ + ٥\,\text{س} + ٧} + \text{س}]$

$= \sqrt{\infty + \infty + ٧} + \infty = \infty$

⑰ $\lim_{\text{س} \to \infty} (٥ + \text{س} - \text{س}^٢) = ٥ + \infty - \infty$

= كمية غير معينة

$\therefore \lim_{\text{س} \to \infty} \text{س}^٢ \left(\frac{٥}{\text{س}^٢} + \frac{١}{\text{س}} - ١\right)$

$= \lim_{\text{س} \to \infty} \text{س}^٢ \times \lim_{\text{س} \to \infty} \left(\frac{٥}{\text{س}^٢} + \frac{١}{\text{س}} - ١\right)$

$= \infty \times -١ = -\infty$

٢

① بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٢$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(٢ + \frac{٩}{\text{س}})(٣ + \frac{٧}{\text{س}})}{(١ + \frac{١}{\text{س}})(٥ + \frac{٤}{\text{س}})} = \frac{٢ \times ٣}{١ \times ٥} = \frac{٦}{٥}$

② بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٢$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٣ - \frac{٤}{\text{س}} + \frac{٥}{\text{س}^٢}}{(١ + \frac{٢}{\text{س}})^٢} = \frac{٣}{١} = ٣$

③ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٢$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٦ - \frac{٥}{\text{س}}}{(\frac{٢}{\text{س}} - ١)(\frac{٢}{\text{س}} + ١)} = \frac{٦}{-١} = -٦$

④ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٣$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{٨ - \frac{١}{\text{س}^٢} + \frac{١}{\text{س}^٣}}{(١ + \frac{١}{\text{س}})(٢ - \frac{٣}{\text{س}^٢})} = \frac{٨}{٢} = ٤$

⑤ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٣$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{١ - \frac{٤}{\text{س}^٢} + \frac{٥}{\text{س}^٣}}{(٢ - \frac{١}{\text{س}})^٣} = \frac{١}{٨}$

⑥ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٣$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(٢ + \frac{٣}{\text{س}})(٤ - \frac{٥}{\text{س}^٢})}{(٣ - \frac{٨}{\text{س}^٢})(٥ - \frac{٣}{\text{س}})} = \frac{٨}{١٥}$

⑦ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٣$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(٢ + \frac{٣}{\text{س}})(٥ - \frac{١}{\text{س}})(١ - \frac{٢}{\text{س}})}{١ \times (١ + \frac{١}{\text{س}})(٣ - \frac{١}{\text{س}})} = \frac{١٠}{٣}$

⑧ بقسمة كل من البسط والمقام على س $= \sqrt{\text{س}^٢}$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(\frac{٧}{\sqrt{\text{س}}} + ١)(\frac{٣}{\sqrt{\text{س}}} + ١)}{٤ - \frac{٢}{\text{س}}} = \frac{١}{٤}$

⑨ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٣$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(٦ - \frac{٥}{\text{س}})(٣ - \frac{٤}{\text{س}})^٢}{(٣ - \frac{٢}{\text{س}})^٣} = \frac{٩ \times ٦}{٢٧} = ٢$

⑩ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٥$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(١ + \frac{٢}{\text{س}})^٣ (\frac{٣}{\text{س}^٢} - ٢)}{٣(١ + \frac{٧}{\text{س}^٢})}$

$= \frac{١^٣ \times -٢}{٣ \times ١} = \frac{-٢}{٣}$

⑪ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^٦ = (\text{س}^٢)^٣$

$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(٣ - \frac{١}{\text{س}^٢})^٣}{١٨ + \frac{١}{\text{س}^٤} - \frac{١}{\text{س}^٦}} = \frac{٢٧}{١٨} = \frac{٣}{٢}$

٣

① بقسمة كل من البسط والمقام على س = $\sqrt{س^٢}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢ + \frac{٣}{س}}{\sqrt{٩ + \frac{٢٥}{س^٢}}} = \frac{٢}{٣}$$

② بقسمة كل من البسط والمقام على س

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\frac{٣}{س^٢} + ٤}}{١} = \sqrt{٤} = ٢$$

③ بقسمة كل من البسط والمقام على س = $\sqrt{س^٢}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢ + \frac{١}{س}}{\sqrt{١ + \frac{٣}{س} - \frac{٤}{س^٢}}} = \frac{٢}{٢} = ١$$

④ بقسمة كل من البسط والمقام على س = $\sqrt[٣]{س^٣}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢ - \frac{٣}{س}}{\sqrt[٣]{١٢٥ + \frac{٥}{س^٣}}} = \frac{٢}{٥}$$

⑤ بقسمة كل من البسط والمقام على س = $\sqrt[٣]{س^٣}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨ + \frac{٥}{س^٢} - \frac{٢}{س^٣}}}{٣ + \frac{٢}{س}} = \frac{٢}{٣}$$

⑥ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$ = $\sqrt{س^٤}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\frac{٤}{س^٢} - ٣}{\sqrt{١ + \frac{٩}{س^٤}}} = -٣$$

⑦ بقسمة كل من البسط والمقام على س = $\sqrt{س^٢}$ = $\sqrt[٣]{س^٣}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٩ - \frac{٢}{س} + \frac{٨}{س^٢}}}{\sqrt[٣]{\frac{٢}{س} + ١٢٥ + \frac{٢}{س^٣}}} = \frac{٣}{٥}$$

⑧ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt{س^٢}$ = $\sqrt[٤]{س^٤}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{١ + \frac{١}{س^٢}}}{\sqrt[٤]{١ + \frac{٢}{س^٤}}} = \frac{١}{١} = ١$$

⑨ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt[٣]{س^٣}$ = $\sqrt[٥]{س^٥}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨ + \frac{١}{س^٣}}}{\sqrt[٥]{٣٢ + \frac{١}{س^٥}}} = \frac{٢}{٢} = ١$$

⑩ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt[٣]{س^٣}$ = $\sqrt[٤]{س^٤}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{٨ + \frac{١}{س^٣}}}{\sqrt[٤]{١ - \frac{٣}{س^٤}}} = ٢$$

⑪ بقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt{س}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٣ - \frac{٢}{س}} - \sqrt{١٢ + \frac{٧}{س}}}{\sqrt{٢٧ - \frac{٥}{س}}}$$

$$= \frac{\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣}}{٣\sqrt{٣}} = \frac{-١}{٣}$$

⑫ بقسمة كل من البسط والمقام على س = $\sqrt{س^٢}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٤ + \frac{٧}{س^٢}} + ٣}{٢ + \frac{٩}{س}} = \frac{٥}{٢}$$

⑬ بقسمة كل من البسط والمقام على

$\sqrt{س^٢} = \sqrt[٦]{س^٦} = \sqrt[٣]{س^٣}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{١ + \frac{٨}{س^٢}} - \sqrt[٦]{\frac{١}{س^٧} + \frac{٤}{س^٦}}}{\sqrt{١ + \frac{٩}{س^٢}}} = ١$$

⑭ بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$ = س $\sqrt{س^٢}$

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٣ - \frac{١}{س} - \frac{٧}{س^٢}}{(١ + \frac{١}{س})\sqrt{٢٥ + \frac{١}{س^٢}}} = \frac{٣}{٥}$$

٤

① (د)	② (أ)	③ (ج)
④ (ج)	⑤ (ج)	⑥ (ج)
⑦ (ب)	⑧ (ب)	⑨ (د)
⑩ (د)	⑪ (ب)	⑫ (ب)
⑬ (ج)	⑭ (ج)	

٥

① $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} ٧ + \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢س^٢}{(س + ٣)^٢}$

$$= ٧ + \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢}{(١ + \frac{٣}{س})^٢} = ٧ + ٢ = ٩$$

② $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س}{٢س + ١} + \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٣س^٢}{(س - ٣)^٢}$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{١}{٢ + \frac{١}{س}} + \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٣}{(١ - \frac{٣}{س})^٢}$$

$$= \frac{١}{٢} + ٣ = \frac{٧}{٢}$$

③ $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٣}{٢} - \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٣س}{٢س + ٧}$

$$= \frac{٣}{٢} - \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٣}{٢ + \frac{٧}{س}} = \frac{٣}{٢} - \frac{٢}{٣} = \frac{٥}{٦}$$

④ $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٢س^٣ - ٢س^٣ - س}{٢س^٢ + ١}$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{-س}{٢س^٢ + ١}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\frac{-١}{س}}{٢ + \frac{١}{س^٢}} = \frac{\text{صفر}}{٢} = \text{صفر}$$

⑤ $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(س^٢ - ١)(س - ٢) - (س^٢ + ١)(س + ٢)}{س^٢ - ٤}$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س^٣ - ٢س^٢ - س + ٢ - س^٣ - ٢س^٢ - س - ٢}{س^٢ - ٤}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{-٤س^٢ - ٢س}{س^٢ - ٤}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{-٤ - \frac{٢}{س}}{١ - \frac{٤}{س^٢}} = -٤$$

⑥

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(\sqrt{س^٢ - ٢} - \sqrt{س^٢ + س})(\sqrt{س^٢ - ٢} + \sqrt{س^٢ + س})}{\sqrt{س^٢ - ٢} + \sqrt{س^٢ + س}}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س^٢ - ٢ - س^٢ - س}{\sqrt{س^٢ - ٢} + \sqrt{س^٢ + س}}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{-٢ - س}{\sqrt{س^٢ - ٢} + \sqrt{س^٢ + س}}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\frac{-٢}{س} - ١}{\sqrt{١ - \frac{٢}{س^٢}} + \sqrt{١ + \frac{١}{س}}} = -\frac{١}{٢}$$

⑦ $\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٤س^٢ + ١} - \sqrt{س^٢ + ١}}{س}$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٤ + \frac{١}{س^٢}} - \sqrt{١ + \frac{١}{س^٢}}}{١} = \frac{٢ - ١}{١} = ١$$

⑧

$$\underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{(\sqrt{س^٢ + ٥س} - س)(\sqrt{س^٢ + ٥س} + س)}{\sqrt{س^٢ + ٥س} + س}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{س^٢ + ٥س - س^٢}{\sqrt{س^٢ + ٥س} + س}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٥س}{\sqrt{س^٢ + ٥س} + س}$$

$$= \underset{س \to \infty}{\text{نها}} \frac{٥}{\sqrt{١ + \frac{٥}{س}} + ١} = \frac{٥}{١ + ١} = \frac{٥}{٢}$$

⑨ $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}\left(\sqrt{4\text{س}^2+1}-2\text{س}\right)\left(\sqrt{4\text{س}^2+1}+2\text{س}\right)}{\left(\sqrt{4\text{س}^2+1}+2\text{س}\right)}$

$= \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}(4\text{س}^2+1-4\text{س}^2)}{\left(\sqrt{4\text{س}^2+1}+2\text{س}\right)}$

$= \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{\text{س}^2}}+2} = \frac{1}{4}$

⑩ بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^{17} = (\text{س}^5)(\text{س}^2)^6$

$= (\text{س}^7)(\text{س}^2)^5$

$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{\text{س}}\right)^5\left(1+\frac{3}{\text{س}^2}\right)^6}{\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^7\left(1-\frac{5}{\text{س}^2}\right)^5}$

$= \frac{(2)^5\,(1)^6}{(1)^7\,(1)^5} = 32$

حل آخر :

$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\left[\text{س}\left(2-\frac{1}{\text{س}}\right)\right]^5\left[\text{س}^2\left(1+\frac{3}{\text{س}^2}\right)\right]^6}{\left[\text{س}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)\right]^7\left[\text{س}^2\left(1-\frac{5}{\text{س}^2}\right)\right]^5}$

$= \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}^5\left(2-\frac{1}{\text{س}}\right)^5 \times \text{س}^{12}\left(1+\frac{3}{\text{س}^2}\right)^6}{\text{س}^7\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^7 \times \text{س}^{10}\left(1-\frac{5}{\text{س}^2}\right)^5}$

$= \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}^{17}\left(2-\frac{1}{\text{س}}\right)^5\left(1+\frac{3}{\text{س}^2}\right)^6}{\text{س}^{17}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^7\left(1-\frac{5}{\text{س}^2}\right)^5}$

$= \frac{(2)^5 \times (1)^6}{(1)^7 \times (1)^5} = 32$

⑪ بضرب كل من البسط والمقام في مرافق البسط والمقام

$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\left(\sqrt{\text{س}+1}-\sqrt{\text{س}-1}\right)\left(\sqrt{\text{س}+1}+\sqrt{\text{س}-1}\right)\left(\sqrt{4\text{س}+1}+\sqrt{4\text{س}-1}\right)}{\left(\sqrt{4\text{س}+1}-\sqrt{4\text{س}-1}\right)\left(\sqrt{4\text{س}+1}+\sqrt{4\text{س}-1}\right)\left(\sqrt{\text{س}+1}+\sqrt{\text{س}-1}\right)}$

$= \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{(\text{س}+1-\text{س}+1)\left(\sqrt{4\text{س}+1}+\sqrt{4\text{س}-1}\right)}{(4\text{س}+1-4\text{س}+1)\left(\sqrt{\text{س}+1}+\sqrt{\text{س}-1}\right)}$

$= \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\sqrt{4\text{س}+1}+\sqrt{4\text{س}-1}}{\sqrt{\text{س}+1}+\sqrt{\text{س}-1}}$

وبقسمة كل من البسط والمقام على $\sqrt{\text{س}}$

$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{\text{س}}}+\sqrt{4-\frac{1}{\text{س}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{\text{س}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\text{س}}}} = \frac{2+2}{1+1} = 2$

٦

① بقسمة كل من البسط والمقام على س^2

$\lim_{\text{س}\to\infty} \left(\frac{3-\frac{5}{\text{س}}+\frac{1}{\text{س}^2}}{4-\frac{7}{\text{س}^2}}\right)^{\frac{1}{\text{س}}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\text{صفر}} = 1$

② $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}+1}{\sqrt{\text{س}^2-1}} + \lim_{\text{س}\to\infty} \text{أ}^{\frac{1}{\text{س}}}$

$= \lim_{\text{س}\to\infty} \left(\frac{1+\frac{1}{\text{س}}}{\sqrt{1-\frac{1}{\text{س}^2}}}\right) + \text{أ}^{\text{صفر}} = 1 + 1 = 2$

③ $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{2-\frac{3}{\text{س}}}{\sqrt[3]{27-\frac{15}{\text{س}^2}+\frac{2}{\text{س}^3}}} + \lim_{\text{س}\to\infty} 8^{\frac{1}{\text{س}}}$

$= \frac{2}{3} + 1 = 1\frac{2}{3}$

④ $\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{5}{\frac{1}{\text{س}^2}-1} - \lim_{\text{س}\to\infty} (13)^{\frac{1}{\text{س}}}$

$= -5 - 1 = -6$

٧

∵ النهاية موجودة وتساوى ٣

∴ درجة البسط = درجة المقام ∴ ن = ٢

$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{4\text{أ}\text{س}^2-4\text{س}+5}{3-9\text{س}+8\text{س}^2} = 3$

بقسمة كل من البسط والمقام على س^2

$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{4\text{أ}-\frac{4}{\text{س}}+\frac{5}{\text{س}^2}}{\frac{3}{\text{س}^2}-\frac{9}{\text{س}}+8} = 3$

$\therefore \frac{4\text{أ}}{8} = 3 \qquad \therefore \text{أ} = 6$

٨

$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\text{أ}+\frac{3}{\text{س}^2}}}{\sqrt{4+\frac{7}{\text{س}^2}}} = -1 \qquad \therefore \frac{\sqrt[3]{\text{أ}}}{2} = -1$

$\therefore \sqrt[3]{\text{أ}} = -2 \qquad \therefore \text{أ} = -8$

٩

$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\left(\sqrt{\text{أ}\text{س}^2+3\text{ب}\text{س}+5}-2\text{س}\right)}{1} \times \frac{\left(\sqrt{\text{أ}\text{س}^2+3\text{ب}\text{س}+5}+2\text{س}\right)}{\left(\sqrt{\text{أ}\text{س}^2+3\text{ب}\text{س}+5}+2\text{س}\right)}$

$= \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{أ}\text{س}^2+3\text{ب}\text{س}+5-4\text{س}^2}{\sqrt{\text{أ}\text{س}^2+3\text{ب}\text{س}+5}+2\text{س}} = 3$

∵ اكبر درجة فى المقام هى ١ ∴ درجة البسط = ١

$\therefore \text{أ}\text{س}^2 - 4\text{س}^2 = 0 \qquad \therefore \text{أ} = 4$

$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{3\text{ب}\text{س}+5}{\sqrt{\text{أ}\text{س}^2+3\text{ب}\text{س}+5}+2\text{س}} = 3$

(بقسمة كل من البسط والمقام على س)

$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{3\text{ب}+\frac{5}{\text{س}}}{\left(\sqrt{\text{أ}+\frac{3\text{ب}}{\text{س}}+\frac{5}{\text{س}^2}}+2\right)} = 3$

$\therefore \frac{3\text{ب}}{\sqrt{\text{أ}}+2} = 3$

$\therefore 3\text{ب} = 3 \times (2+2) \qquad \therefore \text{ب} = 4$

١٠

$\because \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{2-\text{أ}\text{س}^2}{3-\text{ب}\text{س}+\text{س}^2} = 5$

$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\frac{2}{\text{س}^2}-\text{أ}}{\frac{3}{\text{س}^2}-\frac{\text{ب}}{\text{س}}+1} = 5 \qquad \therefore \text{أ} = -5$

$، \because \lim_{\text{س}\to -2} \frac{2+5\text{س}^2}{3-\text{ب}\text{س}+\text{س}^2} = 2$

$\therefore \frac{2+5(-2)^2}{3+2\text{ب}+(-2)^2} = 2 \qquad \therefore 7+2\text{ب} = 11$

$\therefore \text{ب} = 2$

١١

$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}^2+1-(\text{أ}\text{س}+\text{ب})(\text{س}+1)}{\text{س}+1} = 2$

$\therefore \lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}^2-\text{أ}\text{س}^2-(\text{أ}+\text{ب})\text{س}+1-\text{ب}}{\text{س}+1} = 2$

، ∵ النهاية موجودة وتساوى ٢

∴ درجة البسط = درجة المقام

$\therefore \text{س}^2 - \text{أ}\text{س}^2 = 0 \qquad \therefore \text{أ} = 1$

$، \text{أ} + \text{ب} = -2 \qquad \therefore \text{ب} = -3$

١٢

∵ النهاية تساوى ∞

∴ درجة البسط أكبر من درجة المقام

∴ أ + ١ = صفر ومنها أ = −١

، ٧ − ب = صفر ومنها ب = ٧

١٣

① بقسمة كل من البسط والمقام على س^{-2}

$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{1+\frac{1}{\text{س}^2}}{\left(2+\frac{3}{\text{س}}\right)^{-2}} = \frac{1}{2^{-2}} = 4$

② $\lim_{\frac{1}{\text{ن}}\to 0} \frac{\left(\text{أ}+\frac{1}{\text{ن}}\right)^4-\text{أ}^4}{\frac{1}{\text{ن}}}$

$= \lim_{\text{أ}+\frac{1}{\text{ن}}\to \text{أ}} \frac{\left(\text{أ}+\frac{1}{\text{ن}}\right)^4-\text{أ}^4}{\left(\text{أ}+\frac{1}{\text{ن}}\right)-\text{أ}} = 4\text{أ}^3$

③ $\lim_{\frac{1}{\text{س}}\to 0} \frac{\left(3+\frac{1}{\text{س}}\right)^5-243}{\frac{1}{\text{س}}}$

$= \lim_{\left(3+\frac{1}{\text{س}}\right)\to 3} \frac{\left(3+\frac{1}{\text{س}}\right)^5-3^5}{\left(3+\frac{1}{\text{س}}\right)-3} = 5(3)^4 = 405$

④ بالضرب في المرافق

$$\underset{س \to ∞}{\text{نها}} \frac{(\sqrt{س^٢+٢}-س)(\sqrt{٢س^٢+١})(\sqrt{س^٢+٢}+س)}{\sqrt{س^٢+٢}+س}$$

$$= \underset{س \to ∞}{\text{نها}} \frac{(س^٢+٢-س^٢)(\sqrt{٢س^٢+١})}{\sqrt{س^٢+٢}+س}$$

$$= \underset{س \to ∞}{\text{نها}} \frac{٢(\sqrt{٢س^٢+١})}{\sqrt{س^٢+٢}+س}$$

$$= \underset{س \to ∞}{\text{نها}} \frac{٢(\sqrt{٢+\frac{١}{س^٢}})}{\sqrt{١+\frac{٢}{س^٢}}+١} = \sqrt{٢}$$

⑤ $$\underset{س \to ∞}{\text{نها}} \left(\frac{٢}{س}-\frac{١}{س^٢}\right)\sqrt{٤س^٢+١}$$

$$= \underset{س \to ∞}{\text{نها}} \frac{٢\sqrt{٤س^٢+١}}{س} - \underset{س \to ∞}{\text{نها}} \frac{\sqrt{٤س^٢+١}}{س^٢}$$

$$= \underset{س \to ∞}{\text{نها}} \frac{٢\sqrt{٤+\frac{١}{س^٢}}}{١} - \underset{س \to ∞}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\frac{٤}{س^٢}+\frac{١}{س^٤}}}{١}$$

$$= ٢ × ٢ - \text{صفر} = ٤$$

⑥ بقسمة كل من البسط والمقام على $س\sqrt{س} = \sqrt{س^٣}$

$$\underset{س \to ∞}{\text{نها}} \frac{٥ + \frac{١٦}{\sqrt{س}} - ٣\sqrt{\frac{١}{س} - \frac{١}{س^٣}}}{\frac{١}{\sqrt{س}} + \sqrt{٤ + \frac{١}{س^٣}}} = \frac{٥}{٢}$$

إجابات تمارين 16

1

① ١ ② صفر ③ صفر ④ $\frac{٥}{٨}$

⑤ $\frac{٣}{٥}$ ⑥ ١ ⑦ $\frac{٣}{٤}$ ⑧ $\frac{٣}{٤}$

⑨ صفر ⑩ ٤ ⑪ صفر ⑫ $\frac{١}{٦}$

2

① (أ) ② (ب) ③ (جـ) ④ (جـ) ⑤ (د)

⑥ (د) ⑦ (ب) ⑧ (جـ) ⑨ (ب)

3

① $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{جا ٢س}{س}}{\frac{ظا ٥س}{س}} = \frac{٢}{٥}$

② $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{جا \frac{س}{٥}}{س}}{\frac{ظا \frac{٢س}{٣}}{س}} = \frac{\frac{١}{٥}}{\frac{٢}{٣}} = \frac{٣}{١٠}$

③ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{جا ٣س}{٥س} - \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{ظا ٢س}{٥س}$

$= \frac{٣}{٥} - \frac{٢}{٥} = \frac{١}{٥}$

④ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{جا س}{س} + \frac{ظا س}{س}}{\frac{جا س}{س}} = \frac{١+١}{١} = ٢$

⑤ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{جا ٣س}{\frac{ظا ٢س}{س}} = \frac{١}{٢}$

⑥ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٥س}{جا س} - \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{ظا ٢س}{س}$

$= ٥ - ٢ = ٣$

⑦ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٣ + \frac{جا س}{س}}{٢ + \frac{ظا ٣س}{س}} = \frac{٣+١}{٢+٣} = \frac{٤}{٥}$

⑧ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٢\left(\frac{جا س}{س}\right) + ٤\left(\frac{ظا ٢س}{س}\right)}{٢ + \frac{جا ٣س}{س}} = \frac{٢+٨}{٢+٣} = ٢$

⑨ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{جا س}{س} - \frac{٣ ظا س}{س}}{٥ جتا س} = \frac{١-٣}{٥} = \frac{-٢}{٥}$

⑩ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٢}{٥\left(\frac{ظا س}{س}\right) - ٢\left(\frac{جا ٢س}{س}\right)} = \frac{٢}{٥-٤} = ٢$

⑪ بقسمة البسط والمقام على س

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١ + \frac{جا س}{س}}{\frac{جا س}{س} × جتا س} = \frac{١+١}{١×١} = ٢$

⑫ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{ظا ٣س}{س} - \frac{جا ٤س}{س}}{س + ٢} = \frac{٣-٤}{٢} = \frac{-١}{٢}$

⑬ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س + \frac{جا ٣س}{س}}{٥ جتا ٢س} = \frac{٠+٣}{٥×١} = \frac{٣}{٥}$

⑭ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{ظا ٢س}{س} + ٢ جتا س}{\frac{جا ٣س}{س}} = \frac{٢+٢}{٣} = \frac{٤}{٣}$

⑮ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٢ جا \frac{١}{٧}س}{س} = \frac{٢}{٧}$

⑯ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left[\frac{جا \frac{١}{٥}س}{س} + \frac{ظا \frac{١}{٥}س}{س}\right] = \frac{٢}{٥}$

⑰ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{٢ جا ٤س}{٥س} + ٤ جتا ٤س\right) = \frac{١٢}{٥}$

⑱ $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{جا ٢(س-٣)}{٢(س-٣)} = \frac{٢}{٢}$

⑲ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{جا ٢٤س}{س} × جتا ٦س}{\frac{ظا ٦س}{س} × جتا ٢٤س} = \frac{٢٤×١}{٦×١} = ٤$

⑳ النهاية $= \frac{\frac{١}{٢} جتا \left(-٢ × \frac{١}{٢} + ١\right)}{\left(\frac{١}{٢}\right)^٢ + \left(\frac{١}{٢}\right)} = \frac{٢}{٣}$

㉑ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left[\frac{جا^٢ س}{س^٢} × س\right]$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{جا^٢ س}{س^٢} × \underset{س \to ٠}{\text{نها}} س$

$= ١ × ٠ = \text{صفر}$

4

① $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{٥} × \frac{جا^٢ ٣س}{س^٢} = \frac{١}{٥} × ٣^٢ = \frac{٩}{٥}$

② $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{جا^٢ ٣س}{س^٢}}{\frac{ظا^٢ ٢س}{س^٢}} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\left(\frac{جا ٣س}{س}\right)^٢}{\left(\frac{ظا ٢س}{س}\right)^٢} = \frac{٩}{٤}$

③ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{جا^٢ \frac{س}{٢}}{س^٢}}{\frac{ظا ٢س}{س}} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\left(\frac{جا \frac{س}{٢}}{س}\right)^٢}{\frac{ظا ٢س}{س}} = \frac{١}{٨}$

④ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{جا ٢س}{س}}{\left(\frac{جا س}{س}\right)\left(\frac{ظا ٣س}{س}\right)} = \frac{٢}{٣}$

⑤ $\frac{١}{٤} \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{ظا ٢س}{س}\right)^٣ = \frac{٨}{٤} = ٢$

⑥ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{ظا ٢س}{س}}{\left(\frac{جا ٢س}{س}\right)^٤} = \frac{١}{٨}$

⑦ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{جا ٤س}{س} × \left(\frac{ظا ٥س}{س}\right)^٢}{\frac{جا س}{س}} = \frac{٤ × ٢٥}{١} = ١٠٠$

⑧ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{ظا ٢س}{س}}{١ + \left(\frac{جا ٣س}{س}\right)^٢} = \frac{٢}{١+٩} = \frac{١}{٥}$

⑨ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١ + \left(\frac{ظا ٢س}{س}\right)^٢}{٢ + \left(\frac{جا ٣س}{س}\right)^٢} = \frac{١+٤}{٢+٩} = \frac{٥}{١١}$

⑩ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{ظا س}{س}}{٤ - \left(\frac{جا ٣س}{س}\right)^٢} = \frac{١}{٤-٩} = \frac{-١}{٥}$

⑪ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٢س + \frac{جا ٥س}{س}}{١ - \frac{ظا^٢ ٣س}{س^٢}} = \frac{٠+٥}{١-٩} = \frac{-٥}{٨}$

⑫ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٢ + \frac{٥ ظا س}{س} + ٢ \frac{جا س}{س}}{\frac{جا ٢س}{س} × جتا ٢س} = \frac{٢+٦+٢}{١×٢} = ٥$

(١٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{جا}٢س}{س} + \frac{\text{جا}^٢ ٢س}{س^٢}}{\frac{\text{ظا}^٢ ٣س}{س^٢} + ١} = \frac{٢ + ٤}{٩ + ١} = \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$

(١٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{ظا}٣س^٢}{س^٢} + \frac{\text{جا}^٢ ٥س}{س^٢}\right) = ٣ + ٢٥ = ٢٨$

(١٥) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{جا}٥س^٢}{٢س^٢} + \frac{\text{جا}^٣ ٥س}{٢س^٣}\right) = \frac{٥}{٢} + \frac{١٢٥}{٢} = ٦٥$

(١٦) $\left(\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٢س + \frac{\text{ظا}٣س}{س}}{٢س + \frac{\text{ظا}٦س}{س}}\right)^٤ = \left(\frac{١}{٢}\right)^٤ = \frac{١}{١٦}$

(١٧) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{ظا}س}{س}\right)^٢ + \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{ظا}٣س}{س}\right)^٢$

$+ \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{ظا}٥س}{س}\right)^٢ = ١ + ٩ + ٢٥ = ٣٥$

(١٨) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}س}{س} \times \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{جا}٢س}{س}\right)^٢$

$\times \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{جا}٤س}{س}\right)^٣ = ١ \times ٤ \times ٦٤ = ٢٥٦$

(١٩) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{ظا}٦س}{س} - \frac{\text{جا}(-٣س)}{س}}{\text{جا}٥س + \text{جا}٢س} = \frac{٦ - (-٣)}{١ + ١} = \frac{٩}{٢}$

(٢٠) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}س\left(\sqrt{س + ٢} + \sqrt{٢}\right)}{\left(\sqrt{س + ٢} - \sqrt{٢}\right)\left(\sqrt{س + ٢} + \sqrt{٢}\right)}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}س\left(\sqrt{س + ٢} + \sqrt{٢}\right)}{س + ٢ - ٢}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}س}{س} \times \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\sqrt{س + ٢} + \sqrt{٢}\right)$

$= ١ \times ٢\sqrt{٢} = ٢\sqrt{٢}$

(٢١) $\underset{(س - ٣) \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}(س - ٣)}{(س - ٣)}$

$\times \underset{س \to ٣}{\text{نها}} \frac{١}{س^٢ + ٣س + ٩} = ١ \times \frac{١}{٢٧} = \frac{١}{٢٧}$

(٢٢) $\underset{(س - ١) \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(س - ١)}{(س - ١)} \times \underset{س \to ١}{\text{نها}} \frac{١}{(س + ٢)}$

$= ١ \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$

٥

(١) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٣(١ - \text{جتا}س)}{س} = ٣ \times ٠ = ٠$

(٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{-(١ - \text{جتا}س)}{س} \times \frac{س}{\text{جا}س}\right) = ٠ \times ١ = ٠$

(٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{١ - \text{جتا}س}{س} + \frac{\text{جا}س}{س}}{\frac{١ - \text{جتا}س}{س} - \frac{\text{جا}س}{س}} = \frac{٠ + ١}{٠ - ١} = -١$

(٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{١ - \text{جتا}٢س}{س} + \frac{١ - \text{جتا}٤س}{س}\right)$

$= \underset{٢س \to ٠}{\text{نها}} ٢\left(\frac{١ - \text{جتا}٢س}{٢س}\right)$

$+ \underset{٤س \to ٠}{\text{نها}} ٤\left(\frac{١ - \text{جتا}٤س}{٤س}\right) = ٠ + ٠ = ٠$

(٥) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{جا}س}{س} \times \frac{١ - \text{جتا}س}{س}\right) = ١ \times ٠ = ٠$

(٦) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س(١ - \text{جتا}س)}{\text{جا}^٢ ٣س}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{س^٢}{\text{جا}^٢ ٣س} \times \frac{١ - \text{جتا}س}{س}\right)$

$= \frac{١}{٩} \times ٠ = \text{صفر}$

(٧) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^٢ ٣س}{٤س^٢} = \frac{٩}{٤}$

(٨) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٤س^٢}{\text{جا}^٢ \frac{١}{٢}س} = \frac{٤}{\left(\frac{١}{٢}\right)^٢} = ١٦$

(٩) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٣(١ - \text{جتا}^٢ ٤س)}{٨س^٢} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٣\text{جا}^٢ ٤س}{٨س^٢}$

$= \frac{٣}{٨} \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{جا}٤س}{س}\right)^٢ = \frac{٣}{٨} \times ١٦ = ٦$

(١٠) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}^٢ س}{س^٢} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{ظا}س}{س}\right)^٢ = ١$

(١١) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{١ - \text{جتا}س}{س^٢} \times \frac{١ + \text{جتا}س}{١ + \text{جتا}س}\right)$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{١ - \text{جتا}^٢ س}{س^٢} \times \frac{١}{١ + \text{جتا}س}\right)$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^٢ س}{س^٢} \times \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١}{١ + \text{جتا}س}$

$= ١ \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

(١٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{٤(١ - \text{جتا}س)}{س^٢} \times \frac{س^٢}{\text{ظا}^٢ ٣س}\right)$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{٤ \times (١ - \text{جتا}س)}{س^٢} \times \frac{١ + \text{جتا}س}{١ + \text{جتا}س} \times \frac{س^٢}{\text{ظا}^٢ ٣س}\right)$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{٤\text{جا}^٢ س}{س^٢} \times \frac{١}{١ + \text{جتا}س} \times \frac{س^٢}{\text{ظا}^٢ ٣س}\right)$

$= ٤ \times ١ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٩} = \frac{٢}{٩}$

(١٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{١ - \text{جتا}٢س}{س^٢} \times \frac{١ + \text{جتا}٢س}{١ + \text{جتا}٢س} \times \frac{س}{\text{ظا}٢س}\right)$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{١ - \text{جتا}^٢ ٢س}{س^٢} \times \frac{١}{١ + \text{جتا}٢س} \times \frac{س}{\text{ظا}٢س}\right)$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{جا}^٢ ٢س}{س^٢} \times \frac{١}{١ + \text{جتا}٢س} \times \frac{س}{\text{ظا}٢س}\right)$

$= ٤ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = ١$

(١٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{١ - \text{جتا}٣س}{-\text{جا}^٢ ٢س}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{١ - \text{جتا}٣س}{-\text{جا}^٢ ٢س} \times \frac{١ + \text{جتا}٣س}{١ + \text{جتا}٣س}\right)$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{\text{جا}^٢ ٣س}{-\text{جا}^٢ ٢س} \times \frac{١}{١ + \text{جتا}٣س}\right)$

$= \frac{-٩}{٤} \times \frac{١}{٢} = \frac{-٩}{٨}$

٦

(١) (أ) (٢) (جـ) (٣) (أ) (٤) (جـ)

(٥) (ب) (٦) (أ) (٧) (ب) (٨) (أ)

٧

(١) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}٥س}{\text{ظا}٣س} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{جا}٥س}{س}}{\frac{\text{ظا}٣س}{س}} = \frac{٥}{٣}$

(٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} س\left(\frac{١}{\text{جا}٢س} - \frac{١}{\text{ظا}٣س}\right)$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left(\frac{س}{\text{جا}٢س} - \frac{س}{\text{ظا}٣س}\right)$

$= \frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} = \frac{١}{٦}$

(٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٣س\,\text{ظا}٢س}{\text{ظا}^٢ ٣س} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٣\left(\frac{\text{ظا}٢س}{س}\right)}{\left(\frac{\text{ظا}٣س}{س}\right)^٢}$

$= \frac{٣ \times ٢}{٩} = \frac{٢}{٣}$

(٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{٦س^٢}{\text{جا}٢س \times \text{ظا}س}$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \left[٦ \times \left(\frac{س}{\text{جا}٢س}\right) \times \left(\frac{س}{\text{ظا}س}\right)\right]$

$= ٦ \times \frac{١}{٢} \times ١ = ٣$

(٥) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}س}{\text{جا}٤س} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{جا}س}{س}}{\frac{\text{جا}٤س}{س}} = \frac{١}{٤}$

(٦) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س}{\text{جا}س} = ١$

(٧) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{س\,\text{جا}٢س}{\text{ظا}^٢ ٢س} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{جا}٢س}{س}}{\left(\frac{\text{ظا}٢س}{س}\right)^٢} = \frac{٢}{٤}$

(٨) $\underset{(س - \frac{π}{٤}) \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{ظا}٢\left(س - \frac{π}{٤}\right)}{٨\left(س - \frac{π}{٤}\right)} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

(٩) $\underset{(س - \frac{π}{٤}) \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{جا}٢\left(س - \frac{π}{٤}\right)}{\left(س - \frac{π}{٤}\right)}}{\frac{\text{ظا}٤\left(س - \frac{π}{٤}\right)}{\left(س - \frac{π}{٤}\right)}} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

(١٠) $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}س}{\text{ظا}٢س} = \underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\frac{\text{جا}س}{س}}{\frac{\text{ظا}٢س}{س}} = \frac{١}{٢}$

⑪ $\underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(\pi - س)}{-(\pi - س)} = -١$

⑫ $\underset{س \to -\pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}(س + \pi)}{س + \pi} = ١$

⑬ $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{٢س - \pi}{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - س)}$

$= \underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{-٢(\frac{\pi}{٢} - س)}{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - س)} = -٢$

⑭ $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}(\frac{\pi}{٢} - س)}{٢(\frac{\pi}{٢} - س)} = \frac{١}{٢}$

⑮ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(\pi - \pi س)}{١ - س}$

$= \underset{(١ - س) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\,\pi(١ - س)}{١ - س} = \pi$

⑯ $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{١ + س}{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} + \frac{\pi}{٢}س)}$

$= \underset{(س + ١) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ + س)}{\text{جا}[\frac{\pi}{٢}(١ + س)]} = \frac{٢}{\pi}$

⑰ $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} (١ - س)\,\text{ظتا}(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢}س)$

$= \underset{(١ - س) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{(١ - س)}{\text{ظا}(\frac{\pi}{٢}(١ - س))} = \frac{٢}{\pi}$

٨

① $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا} س}{س} = ١$

② $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا} س}{س} = \frac{١}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{٢}{\pi}$

③ $\underset{س \to \pi}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا} س}{س} = \frac{\text{صفر}}{\pi} = \text{صفر}$

٩

① $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(س - ٥)}{(س - ٥)(س + ٥)} = \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \frac{١}{س + ٥}$

$\times \underset{(س - ٥) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(س - ٥)}{س - ٥} = \frac{١}{١٠} \times ١ = \frac{١}{١٠}$

② $\underset{(س - ٥) \to ٠}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{جا}(س - ٥)}{(س - ٥)}\right]^٢ = (١)^٢ = ١$

③ $\underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} \left[(س - ٥) \times \frac{\text{جا}(س - ٥)^٢}{(س - ٥)^٢}\right]$

$= \underset{س \to ٥}{\text{نهـا}} (س - ٥) \times \underset{(س - ٥) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(س - ٥)^٢}{(س - ٥)^٢}$

= صفر × ١ = صفر

١٠

① (د) ② (ج) ③ (د) ④ (ج) ⑤ (ب)

إرشادات لحل رقم ١٠

① يمكننا باستخدام تجريب قيم ا المعطاة استنتاج أن النهاية = ١ عندما ا = ٢

② $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} س\,\text{ظا}(\frac{\pi}{٢} + س) = \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} (-س\,\text{ظتا} س)$

$= \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-س}{\text{ظا} س} = -١$

③ $\underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{١ - \text{ظا} س}{\text{جتا} س - \text{جا} س}$ بالضرب × جتا س بسطًا ومقامًا،

$= \underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{(\text{جتا} س - \text{جا} س)}{\text{جتا} س(\text{جتا} س - \text{جا} س)}$

$= \underset{س \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{جتا} س} = \sqrt{٢}$

④ $\underset{س \to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(س^٢ - ٥)}{\text{ظا}(\pi س^٢)}$

$= \underset{س \to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(س^٢ - ٥)}{\text{ظا}(\pi س^٢ - \pi)}$

$= \underset{س \to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(س^٢ - ٥)}{\text{ظا}(\pi س^٢ - ٥\pi)}$

$= \underset{س \to \sqrt{٥}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(س^٢ - ٥)}{\text{ظا}(\pi(س^٢ - ٥))} = \frac{١}{\pi}$

⑤ بقسمة كل من البسط والمقام على س

$∴ \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\text{جا} س}{س} + \frac{\text{جا} ٢س}{س} + \frac{\text{جا} ٣س}{س} + ... + \frac{\text{جا} ن س}{س}}{\frac{\text{ظا} س}{س} + \frac{\text{ظا} ٢س}{س} + \frac{\text{ظا} ٣س}{س} + ... + \frac{\text{ظا} ن س}{س}}$

$= ١$

١١

① بالقسمة بسطًا ومقامًا على ظا² س

$\underset{\text{ظا} س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{٣ - ٤\,\text{ظا} س + ٧\,\text{ظا}^٢ س}{٥\,\text{ظا}^٢ س + ٢} = \frac{٧}{٥}$

② $\underset{س \to -١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}[(س + ١)(س - ٢)]}{س + ١}$

$= \underset{(س + ١)(س - ٢) \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}[(س + ١)(س - ٢)]}{(س + ١)(س - ٢)}$

$\times \underset{س \to -١}{\text{نهـا}} (س - ٢) = ١ \times (-٣) = -٣$

③ ∵ س ← ∞ ∴ $\frac{١}{س}$ ← ٠

$∴ \underset{\frac{١}{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}\frac{٤}{س} + \text{جا}\frac{٣}{س}}{\frac{١}{س}}$

$= \underset{\frac{١}{س} \to ٠}{\text{نهـا}} \left[\frac{\text{ظا}\frac{٤}{س}}{\frac{١}{س}} + \frac{\text{جا}\frac{٣}{س}}{\frac{١}{س}}\right] = ٤ + ٣ = ٧$

④ $\underset{\text{جا} س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{١}{٥} \times \left[\frac{\text{جا}(\text{جا} س)}{(\text{جا} س)}\right] = \frac{١}{٥}$

⑤ $\underset{\text{جا} س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(١ - \text{جا} س)}{(١ - \text{جا} س)} = ١$

⑥ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{ظا}(\text{ظا} ٥س)}{\text{ظا} ٥س} \times \frac{\text{ظا} ٥س}{٤س}\right)$

$= \underset{\text{ظا} ٥س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}(\text{ظا} ٥س)}{\text{ظا} ٥س} \times \underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا} ٥س}{٤س}$

$= ١ \times \frac{٥}{٤} = \frac{٥}{٤}$

⑦ $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢\,\text{ظا} س}{س} \times \frac{١}{١ + \text{ظا}^٢ س}\right) = ٢ \times \frac{١}{١ + ٠} = ٢$

⑧ $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{ظا}(\text{جتا} س)}{\text{جتا} س} \times \frac{\text{جتا} س}{٢س - \pi}\right)$

$= \underset{\text{جتا} س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا}(\text{جتا} س)}{\text{جتا} س} \times \underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - س)}{-٢(\frac{\pi}{٢} - س)}$

$= ١ \times \frac{-١}{٢} = \frac{-١}{٢}$

⑨ $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{(١ - \text{جا} س)(١ + \text{جا} س)}{(٢س - \pi)(١ + \text{جا} س)}$

$= \underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا}^٢ س}{-٢(\frac{\pi}{٢} - س)} \times \frac{١}{١ + \text{جا} س}$

$= \underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}^٢(\frac{\pi}{٢} - س)}{-٢(\frac{\pi}{٢} - س)^٢} \times \frac{\frac{\pi}{٢} - س}{١ + \text{جا} س}$

$= \frac{١}{-٢} \times \text{صفر} = \text{صفر}$

⑩ $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{\pi}{٢} - س}{\text{ظا} ٢(\frac{\pi}{٢} - س)} = \frac{١}{٢}$

⑪ $\underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - س)}{-\text{جا}(\frac{٣\pi}{٢} - ٣س)}$

$= \underset{س \to \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{٢} - س)}{(\frac{\pi}{٢} - س)} \times \frac{(\frac{\pi}{٢} - س)}{-\text{جا} ٣(\frac{\pi}{٢} - س)}$

$= ١ \times \frac{١}{٣} = \frac{١}{٣}$

إجابات تمارين 17

١

$\underset{س \to ٣^-}{\text{نهـا}} د(س) = (٣)^٢ + ١ = ١٠$

$\underset{س \to ٣^+}{\text{نهـا}} د(س) = ٣(٣) + ١ = ١٠$

∵ $د(٣^-) = د(٣^+) = ١٠$

∴ $\underset{س \to ٣}{\text{نهـا}} د(س) = ١٠$

٢

د(٢^+) = نهــا (س ← ٢^+) د(س) = ٢ × ٣ − ٧ = −١

د(٢^−) = نهــا (س ← ٢^−) [(س − ٢)(س − ٤)] / (س − ٢) = −١

∵ د(٢^+) = د(٢^−) = −١ ∴ نهــا (س ← ٢) د(س) = −١

٣

د(٠^−) = نهــا د(س) = ٢

د(٠^+) = نهــا د(س) = ١

∵ د(٠^−) ≠ د(٠^+)

∴ نهــا (س ← ٠) د(س) غير موجودة.

٤

د(٠^−) = نهــا د(س) = ١

د(٠^+) = نهــا (س ← ٠^+) (٥ س + ظا ٢ س) / (٦ س + جا س)

= نهــا (س ← ٠^+) (٥ + ظا ٢ س / س) / (٦ + جا س / س) = (٥ + ٢) / (٦ + ١) = ١

∵ د(٠^+) = د(٠^−) = ١ ∴ نهــا (س ← ٠) د(س) = ١

٥

① نهــا (س ← ٠^−) د(س) = ٠ − ٢ = −٢

نهــا (س ← ٠^+) د(س) = ٠^٢ = ٠

∵ د(٠^−) ≠ د(٠^+)

∴ نهــا (س ← ٠) د(س) غير موجودة.

② د(١^−) = د(١^+) = ١^٢ = ١ (لها نفس التعريف)

∴ نهــا (س ← ١) د(س) = ١

③ د(٢^−) = نهــا (س ← ٢^−) س^٢ = ٤

د(٢^+) = نهــا (س ← ٢^+) ٢ س = ٤

∵ د(٢^−) = د(٢^+) = ٤

∴ نهــا (س ← ٢) د(س) = ٤

٦

د(٣^−) = د(٣^+) = صفر

∴ نهــا (س ← ٣) د(س) = صفر

٧

د(٠^−) = نهــا (س ← ٠^−) (س / (√(س + ١) − ١) × (√(س + ١) + ١) / (√(س + ١) + ١))

= نهــا (س ← ٠^−) س (√(س + ١) + ١) / (س + ١ − ١)

= نهــا (س ← ٠^−) (√(س + ١) + ١) = ٢

د(٠^+) = نهــا (س ← ٠^+) ٢ س / جا س = ٢

∵ د(٠^−) = د(٠^+) ∴ نهــا (س ← ٠) د(س) = ٢

٨

د(٤^−) = نهــا (س ← ٤^−) ((س − ٣)^٢ − ١) / (س − ٤)

= نهــا (س − ٣ ← ١^−) ((س − ٣)^٢ − ١^٢) / ((س − ٣) − ١) = ٦

د(٤^+) = نهــا (س ← ٤^+) (س + ٢) = ٦

∵ د(٤^−) = د(٤^+) ∴ نهــا (س ← ٤) د(س) = ٦

٩

∵ نهــا (س ← ٢) د(س) = ٧

∴ د(٢^−) = د(٢^+) = ٧

∵ د(٢^−) = ٤ + ٣ م = ٧ ∴ م = ١

∵ د(٢^+) = ١٠ + ك = ٧ ∴ ك = −٣

١٠

∵ د(٠^−) = د(٠^+) = ٢ ∴ د(٠) = أ = ٢

١١

∵ نهــا (س ← ١) | ٣ س + ٢ | = ١٤

∴ | ٣ أ + ٢ | = ١٤

∴ ٣ أ + ٢ = ١٤ ∴ أ = ٤

أو ٣ أ + ٢ = −١٤ ∴ أ = −١٦ / ٣

١٢

① د((−π/٢)^+) = نهــا (س ← (−π/٢)^+) ٢ س / ظا س = −π / −√٢ = π / √٢

، د((−π/٢)^−) غير موجودة

∴ نهــا (س ← −π/٢) د(س) غير موجودة.

② د((π/٢)^−) = ٢ جا π/٢ = ٢/٢

، د((π/٢)^+) غير موجودة.

نهــا (س ← π/٢) د(س) غير موجودة.

③ د(٠^−) = نهــا (س ← ٠^−) ٢ س / ظا س = ٢

، د(٠^+) = ٢

∵ د(٠^−) = د(٠^+) = ٢ ∴ نهــا (س ← ٠) د(س) = ٢

١٣

∵ د(س) = س^٢ + √(س^٢ − ٦ س + ٩) / (س − ٣)

= س^٢ + |س − ٣| / (س − ٣)

∴ د(س) = { س^٢ + ١ ، س > ٣ ؛ س^٢ − ١ ، س < ٣ }

د(٣^+) = نهــا (س ← ٣^+) (س^٢ + ١) = ١٠

د(٣^−) = نهــا (س ← ٣^−) (س^٢ − ١) = ٨

١٤

د(س) = (س^٢ + ٢ |س|) / س

د(س) = { (س^٢ + ٢ س) / س ، س > ٠ ؛ (س^٢ − ٢ س) / س ، س < ٠ }

= { س (س + ٢) / س ، س > ٠ ؛ س (س − ٢) / س ، س < ٠ }

= { س + ٢ ، س > ٠ ؛ س − ٢ ، س < ٠ }

د(٠^−) = ٠ − ٢ = −٢

د(٠^+) = ٠ + ٢ = ٢

∵ د(٠^−) ≠ د(٠^+) ∴ نهــا (س ← ٠) د(س) غير موجودة

١٥

د(س) = { − س^٢ + ٢ ، س < ٠ ؛ ٢ ، س > ٠ }

د(٠^−) = نهــا (س ← ٠^−) (− س^٢ + ٢) = ٢

د(٠^+) = ٢

∵ د(٠^−) = د(٠^+) ∴ نهــا (س ← ٠) د(س) = ٢

١٦

د(س) = { (س − ١)^٢ / −(س − ١) ، س < ١ ؛ ٦ س − ٢ م ، س > ١ }

= { −(س − ١) ، س < ١ ؛ ٦ س − ٢ م ، س > ١ }

∵ نهــا (س ← ١) د(س) لها وجود عند س = ١

∴ د(١^−) = د(١^+)

∴ −(١ − ١) = ٦ (١) − ٢ م

∴ م = ٣

∵ د(٣^+) ≠ د(٣^−)

∴ نهــا (س ← ٣) د(س) غير موجودة.

17

$د(\pi^-) = \underset{س \to \pi^-}{\text{نها}} \frac{٢ \text{ جا } س}{\pi - س}$

$= \underset{(\pi - س) \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{٢ \text{ جا } (\pi - س)}{\pi - س} = ٢$

، $د(\pi^+) = \underset{س \to \pi^+}{\text{نها}} (١ - \text{جتا } س) = ٢$

، ∵ $د(\pi^+) = د(\pi^-)$ ∴ $\underset{س \to \pi}{\text{نها}} د(س) = ٢$

18

① أولاً (ب)	ثانيًا (أ)	ثالثًا (د)	
② (جـ)	③ (ب)	④ (ب)	⑤ (أ)
⑥ (أ)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)	⑨ (ب)
⑩ (د)	⑪ (أ)	⑫ (د)	⑬ (ب)
⑭ (أ)	⑮ (أ)	⑯ (جـ)	⑰ (جـ)
⑱ (د)			

19

$(د + ر)(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢س + ٢ ، & س \geq ١ \\ ٢س^٢ - ٥س + ٤ ، & س < ١ \end{cases}$

$(د + ر)(١^+) = \underset{س \to ١^+}{\text{نها}} (س^٢ - ٢س + ٢) = ١$

$(د + ر)(١^-) = \underset{س \to ١^-}{\text{نها}} (٢س^٢ - ٥س + ٤) = ١$

∵ $(د + ر)(١^+) = (د + ر)(١^-)$

∴ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} [د(س) + ر(س)] = ١$

20

∵ $\underset{س \to -١}{\text{نها}} د(س)$ موجودة

∴ $د(-١^-) = د(-١^+)$

$٣(-١) - ٢ = -أ + ب$ ∴ $أ - ب = ٥$ (١)

∵ $\underset{س \to ٣}{\text{نها}} د(س)$ موجودة ∴ $د(٣^-) = د(٣^+)$

$٢أ + ب = ٦ - ٣$ ∴ $٢أ + ب = ٣$ (٢)

∴ $أ = ٢$ ومنها $ب = -٣$

21

∵ الدالة لها نهاية عند $س = ٠$

∴ $د(٠^+) = د(٠^-)$

∴ $\underset{س \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{أس}{\sqrt{س + ٤} - ٢} = \underset{س \to ٠^-}{\text{نها}} \frac{\text{جا } ٣س}{أس}$

∴ $\underset{س \to ٠^+}{\text{نها}} \left(\frac{أس}{\sqrt{س + ٤} - ٢} \times \frac{\sqrt{س + ٤} + ٢}{\sqrt{س + ٤} + ٢}\right) = \frac{٣}{أ}$

∴ $\underset{س \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{أس(\sqrt{س + ٤} + ٢)}{س} = \frac{٣}{أ}$

∴ $٤أ = \frac{٣}{أ}$ ∴ $٤أ^٢ = ٣$ ∴ $أ = \pm \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

22

① $د(٥^+) = \underset{س \to ٥^+}{\text{نها}} \sqrt{س - ٥} = \text{صفر}$

$د(٥^-)$ غير موجودة

∴ $\underset{س \to ٥}{\text{نها}} د(س)$ غير موجودة

② $د(٢^+)$ غير موجودة

$د(٢^-) = \underset{س \to ٢^-}{\text{نها}} \sqrt{٢ - س} = \text{صفر}$

∴ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} د(س)$ غير موجودة

③ $د(-١^+)$ غير موجودة

$د(-١^-) = \underset{س \to (-١)^-}{\text{نها}} \sqrt{س^٢ - ١} = \text{صفر}$

∴ $\underset{س \to -١}{\text{نها}} د(س)$ غير موجودة

$د(١^+) = \underset{س \to ١^+}{\text{نها}} \sqrt{س^٢ - ١} = \text{صفر}$

$د(١^-)$ غير موجودة

∴ $\underset{س \to ١}{\text{نها}} د(س)$ غير موجودة

④ $د(-٢^-)$ غير موجودة

$د(-٢^+) = \underset{س \to (-٢)^+}{\text{نها}} \sqrt{٤ - س^٢} = \text{صفر}$

∴ $\underset{س \to -٢}{\text{نها}} د(س)$ غير موجودة

، $د(٢^+)$ غير موجودة

، $د(٢^-) = \underset{س \to ٢^-}{\text{نها}} \sqrt{٤ - س^٢} = \text{صفر}$

∴ $\underset{س \to ٢}{\text{نها}} د(س)$ غير موجودة

23

① $د(٠^-) = \underset{س \to ٠^-}{\text{نها}} \frac{(س + ٢)^٦ - ٢^٦}{س(س + ٣٢)}$

$= \underset{س \to ٠^-}{\text{نها}} \left[\frac{١}{س + ٣٢} \times \frac{(س + ٢)^٦ - ٢^٦}{س}\right]$

$= \frac{١}{٣٢} \times ٦ \times ٢^٥ = ٦$

، $د(٠^+) = \underset{س \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{-١٢س}{١ - (\text{جا } س + \text{جتا } س)^٢}$

$= \underset{س \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{-١٢س}{١ - (١ + ٢ \text{ جا } س \text{ جتا } س)}$

$= \underset{س \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{١٢س}{٢ \text{ جا } س \text{ جتا } س} = ٦$

، ∵ $د(٠^+) = د(٠^-) = ٦$

∴ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} د(س) = ٦$

② $د(٠^-) = \underset{س \to ٠^-}{\text{نها}} \left(\frac{١ - \text{جتا } س}{\text{ظا}^٢ ٣س} \times \frac{١ + \text{جتا } س}{١ + \text{جتا } س}\right)$

$= \underset{س \to ٠^-}{\text{نها}} \left(\frac{١ - \text{جتا}^٢ س}{\text{ظا}^٢ ٣س} \times \frac{١}{١ + \text{جتا } س}\right)$

$= \underset{س \to ٠^-}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^٢ س}{\text{ظا}^٢ ٣س}$

$\times \underset{س \to ٠^-}{\text{نها}} \frac{١}{١ + \text{جتا } س}$

$= \frac{١}{٩} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{١٨}$

، $د(٠^+) = \underset{س \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{١}{٢} س^٢ \text{ جتا } ٦س \text{ ظتا}^٢ ٣س$

$= \underset{س \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{\frac{١}{٢} س^٢ \text{ جتا } ٦س}{\text{ظا}^٢ ٣س}$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٩} \times ١ = \frac{١}{١٨}$

، ∵ $د(٠^-) = د(٠^+) = \frac{١}{١٨}$

∴ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} د(س) = \frac{١}{١٨}$

24

∵ $|س| = \begin{cases} س ، & س \geq ٠ \\ -س ، & س < ٠ \end{cases}$

① $\underset{س \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{\text{جا}|س|}{س} = \underset{س \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{\text{جا } س}{س} = ١$

، $\underset{س \to ٠^-}{\text{نها}} \frac{\text{جا}|س|}{س} = \underset{س \to ٠^-}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(-س)}{س}$

$= -١$

∴ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى

∴ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}|س|}{س}$ غير موجودة

② $\underset{س \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}|س|}{س + ١} = \underset{س \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{\text{جتا } س}{س + ١} = ١$

، $\underset{س \to ٠^-}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}|س|}{س + ١} = \underset{س \to ٠^-}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}(-س)}{س + ١}$

$= \underset{س \to ٠^-}{\text{نها}} \frac{\text{جتا } س}{س + ١} = ١$

∵ النهاية اليمنى = النهاية اليسرى = ١

∴ $\underset{س \to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جتا}|س|}{س + ١} = ١$

25

$\underset{س \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{قا}^٢ س - ١}}{س} = \underset{س \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{ظا}^٢ س}}{س}$

$= \underset{س \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{|\text{ظا } س|}{س}$

، ∵ $|\text{ظا } س| = \begin{cases} \text{ظا } س ، & \text{ظا } س \geq ٠ \\ -\text{ظا } س ، & \text{ظا } س < ٠ \end{cases}$

∴ $\underset{س \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{|\text{ظا } س|}{س} = \underset{س \to ٠^+}{\text{نها}} \frac{\text{ظا } س}{س} = ١$

*لاحظ عندما $س \to ٠^+$ فإن $\text{ظا } س \to ٠^+$

، $\lim_{س \to ٠^+} \frac{|طا\ س|}{س} = \lim_{س \to ٠^-} \frac{-طا\ س}{س} = -١$

، لاحظ عندما س ← ٠⁻ فإن طا س ← ٠⁻

، ∵ النهاية اليمنى ≠ النهاية اليسرى

∴ $\lim_{س \to ٠} \frac{\sqrt{قا^٢ س - ١}}{س}$ غير موجودة

٢٦

$\lim_{س \to ٢^+} (ن(س) + هـ(س))$

$= \lim_{س \to ٢^+} (ن(س)) + \lim_{س \to ٢^+} (هـ(س))$

$= ١٤ + ٤ = ١٨$

، $\lim_{س \to ٢^-} (ن(س) + هـ(س))$

$= \lim_{س \to ٢^-} (ن(س)) + \lim_{س \to ٢^-} (هـ(س))$

$= ١٠ + ٨ = ١٨$

∴ $\lim_{س \to ٢^+} (ن(س) + هـ(س))$

$= \lim_{س \to ٢^-} (ن(س) + هـ(س))$

∴ $\lim_{س \to ٢} [ن(س) + هـ(س)] = ١٨$

٢٧

① ∵ $\lim_{س \to ٢^-} \frac{١}{س - ٢} = \frac{١}{٠^-} = -\infty$

، $\lim_{س \to ٢^+} \frac{١}{س - ٢} = \frac{١}{٠^+} = \infty$

∴ $\lim_{س \to ٢} \frac{١}{س - ٢}$ غير موجودة

② ∵ $\lim_{س \to ٠^-} د(س) = \frac{١}{٠^+} = \infty$

$\lim_{س \to ٠^+} د(س) = \frac{١}{٠^+} = \infty$

∴ $\lim_{س \to ٠} د(س) = \infty$

③ ∵ $\lim_{س \to ١^-} \frac{١}{س - ١} = \frac{١}{٠^-} = -\infty$

$\lim_{س \to ١^+} (س - ٢) = -١$

∴ $\lim_{س \to ١} د(س)$ غير موجودة.

٢٨

$$د(س) = \begin{cases} ١ + \frac{س(س + ٢)}{-(س + ٢)} & ، -٣ < س < -٢ \\ ١ + \frac{س(س + ٢)}{س + ٢} & ، -٢ < س < ٠ \\ ٢س + ١ & ، ٠ < س < ٢ \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ١ - س & ، -٣ < س < -٢ \\ ١ + س & ، -٢ < س < ٠ \\ ٢س + ١ & ، ٠ < س < ٢ \end{cases}$$

① $\lim_{س \to -٣^-} د(س)$ غير موجودة

$\lim_{س \to -٣^+} د(س) = ٤$

∴ $\lim_{س \to -٣} د(س)$ غير موجودة.

② $\lim_{س \to -٢^-} د(س) = ١ - (-٢) = ٣$

$\lim_{س \to -٢^+} د(س) = ١ + (-٢) = -١$

∴ $\lim_{س \to -٢} د(س)$ غير موجودة.

③ $\lim_{س \to ٠^-} د(س) = ١$

$\lim_{س \to ٠^+} د(س) = ١$

∴ $\lim_{س \to ٠} د(س) = ١$

④ $\lim_{س \to ٢^-} د(س) = ٢(٣) + ١ = ٧$

، $\lim_{س \to ٢^+} د(س)$ غير موجودة

∴ $\lim_{س \to ٢} د(س)$ غير موجودة.

٢٩

$د(٢^+) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{(٢س - ٣)^{\frac{١}{٣}} - ١}{(٣س - ٥)^{\frac{١}{٥}} - ١}$

$= \frac{٢}{٣} \lim_{س \to ٢^+} \left(\frac{(٢س - ٣)^{\frac{١}{٣}} - ١^{\frac{١}{٣}}}{٢(س - ٢)} \times \frac{٣(س - ٢)}{(٣س - ٥)^{\frac{١}{٥}} - ١^{\frac{١}{٥}}} \right)$

$= \frac{٢}{٣} \lim_{(٢س - ٣) \to ١} \frac{(٢س - ٣)^{\frac{١}{٣}} - ١^{\frac{١}{٣}}}{(٢س - ٣) - ١} \times \lim_{(٣س - ٥) \to ١} \frac{(٣س - ٥) - ١}{(٣س - ٥)^{\frac{١}{٥}} - ١^{\frac{١}{٥}}}$

$= \frac{٢}{٣} \times \frac{١}{٣} \times ٥ = \frac{١٠}{٩}$

، ∵ الدالة لها نهاية عند س = ٢

∴ $د(٢^+) = د(٢^-)$ ∴ $\frac{١٠}{٩} = ٢ك$ ∴ $ك = \frac{٥}{٩}$

٣٠

∵ الدالة لها نهاية عند س = ٣

∴ $د(٣^+) = د(٣^-)$

∴ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + أس + ب}{(س - ٣)(س - ١)} = ١٢$

، ∵ المقام = صفر عندما س = ٣

∴ البسط = صفر عندما س = ٣

∴ $(٣)^٢ + أ(٣) + ب = ٠$

∴ $ب = -٣أ - ٩$

∴ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + أس - ٣أ - ٩}{(س - ٣)(س - ١)} = ١٢$

∴ $\lim_{س \to ٣} \frac{(س^٢ - ٩) + (أس - ٣أ)}{(س - ٣)(س - ١)} = ١٢$

∴ $\lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣) + أ(س - ٣)}{(س - ٣)(س - ١)} = ١٢$

∴ $\lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س + ٣ + أ)}{(س - ٣)(س - ١)} = ١٢$

∴ $\frac{٦ + أ}{٢} = ١٢$ ∴ $أ = ١٨$

ومنها $ب = -٦٣$

٣١

① (جـ) ② (ب) ③ (أ) ④ (جـ) ⑤ (جـ)

⑥ (د) ⑦ (ب) ⑧ (جـ) ⑨ (د)

إرشادات لحل رقم ٣١

① ∵ $د(س) = س^٢$

∴ $د(د(س)) = (س^٢)^٢ = س^٤$

∴ $\lim_{س \to ٢} د(د(س)) = \lim_{س \to ٢} س^٤$

$= ٢^٤ = ١٦$

② ∵ $\lim_{س \to ٣} د(س) = ٧$

∴ المنحنى إما يمر بالنقطة (٣ ، ٧) أو عنده ثغرة عند هذه النقطة

، ∵ د دالة فردية

∴ المنحنى إما يمر بالنقطة (-٣ ، -٧) أو عنده ثغرة عند هذه النقطة

∴ $\lim_{س \to -٣} د(س) = -٧$

③ ∵ $\lim_{س \to ٣} د(س) = ٥$

∴ المنحنى إما يمر بالنقطة (٣ ، ٥) أو عنده ثغرة عند هذه النقطة

، ∵ د دالة زوجية

∴ المنحنى إما يمر بالنقطة (-٣ ، ٥) أو عنده ثغرة عند هذه النقطة

∴ $\lim_{س \to -٣} د(س) = ٥$

④ ∵ د دالة كثيرة حدود وكانت $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ د (س) = ٢

∴ منحنى الدالة يمر بالنقطة (٢ ، ٢) أو عنده ثغرة عند هذه النقطة.

∴ منحنى $د^{-١}$ يمر بالنقطة (٣ ، ٢) أو عنده ثغرة عند هذه النقطة.

∴ $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ $د^{-١}$ (س) = ٢

⑤ ∵ منحنى د (س + ١) هو نفس منحنى د (س) بإزاحة أفقية مقدارها وحدة واحدة فى اتجاه و $\overleftarrow{س}$

، ∵ نهـا د (س) = ٥ عند س ← ٢

∴ نهـا د (س + ١) = ٥ عندما س ← ١

أى أن $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ د (س + ١) = ٥

⑥ ∵ $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \frac{[د (س)]^{٢} - ٦٤}{د (س) - ٤}$

• لاحظ أن عند س ← -٢

فإن د (س) ← د (-٢) أى أن د (س) ← ٤.

$= \underset{د (س) \leftarrow ٤}{\text{نهـا}} \frac{[د (س)]^{٢} - (٤)^{٢}}{[د (س)] - (٤)} = ٣ (٤)^{٢} = ٤٨$

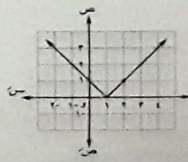
⑦ من الرسم نجد أن د (س) = س - ١

، ر (س) = - س + ١

∴ $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{د (س)}{ر (س)} = \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س - ١}{- س + ١}$

$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س - ١}{-(س - ١)} = -١$

⑧



لاحظ أن منحنى | د (س) | هو نفس منحنى د (س) بعد أنعكاس الجزء الموجود أسفل محور السينات لأعلى كما بالشكل المقابل

ومن الرسم ∴ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ | د (س) | = ١

⑨ ∵ د (س) = $\frac{٤}{٣}$ س + ٤

وبتبديل المتغيرات ∴ س = $\frac{٤}{٣}$ ص + ٤

∴ ص = $\frac{٣}{٤}$ (س - ٤) = $\frac{٣}{٤}$ س - ٣

∴ $د^{-١}$ (س) = $\frac{٣}{٤}$ س - ٣

∴ $\underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{د (س)}{د^{-١} (س)}$

$= \underset{س \leftarrow \infty}{\text{نهـا}} \frac{\frac{٤}{٣} س + ٤}{\frac{٣}{٤} س - ٣} = \frac{١٦}{٩}$

إجابات تمارين 18

أولاً تمارين على الاتصال عند نقطة

١

① ∵ د (-١) = $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ ($س^{٢}$ + س - ٣) = -٣

∴ الدالة د متصلة عند س = -١

② ∵ د (٩) = $\underset{س \leftarrow ٩}{\text{نهـا}} \sqrt[٣]{س - ١}$ = ٢

∴ الدالة د متصلة عند س = ٩

③ ∵ د (١) = $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ = ٣

∴ الدالة د متصلة عند س = ١

، ∵ د (٢) غير معرفة

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٢

④ د (٣) = $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ (٥ - | س - ٣ |) = ٥

∴ الدالة د متصلة عند س = ٣

⑤ ∵ د (٤) = $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}$ (| س - ٤ | + | س + ٢ |) = ٦

∴ الدالة د متصلة عند س = ٤

، ∵ د (-٢) = $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}}$ (| س - ٤ | + | س + ٢ |) = ٦

∴ الدالة د متصلة عند س = -٢

⑥ ∵ د ($\frac{١}{٢}$) = ٤ ($\frac{١}{٢}$)^{٢} + ٣ = ٤

، د ($\frac{١}{٢}^{-}$) = $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}}$ (٤ $س^{٢}$ + ٣) = ٤

، د ($\frac{١}{٢}^{+}$) = $\underset{س \leftarrow \frac{١}{٢}}{\text{نهـا}}$ (٥ - ٢ س) = ٤

∴ د ($\frac{١}{٢}$) = د ($\frac{١}{٢}^{-}$) = د ($\frac{١}{٢}^{+}$)

∴ الدالة د متصلة عند س = $\frac{١}{٢}$

⑦ ∵ د (-١) = $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ ٢ س = -٢

∴ الدالة د متصلة عند س = -١

، ∵ الدالة د غير معرفة عند س = ١

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ١

⑧ • عند س = -٢

د (-٢) = ١ ، د (-٢^{+}) = ١

، د (-٢^{-}) = $\underset{س \leftarrow (-٢)}{\text{نهـا}}$ (س + ٤) = ٢

، ∵ د (-٢^{-}) ≠ د (-٢^{+})

∴ الدالة د غير متصلة عند س = -٢

• عند س = -١

د (-١) = -٢ + ٣ = ١

، د (-١^{-}) = ١

، د (-١^{+}) = $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}}$ (٢ س + ٣) = ١

∴ د (-١) = د (-١^{-}) = د (-١^{+})

∴ الدالة د متصلة عند س = -١

⑨ ∵ د (١) = ٤

، د (١^{+}) = $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ($س^{٢}$ + ٣) = ٤

، د (١^{-}) = $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{س^{٢} + ٢ س - ٣}{س - ١}$

$= \underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \frac{(س - ١)(س + ٣)}{س - ١} = ٤$

، ∵ د (١) = د (١^{-}) = د (١^{+})

∴ الدالة د متصلة عند س = ١

⑩ د (س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، س > ٠ \\ ٢ & ، س = ٠ \\ -س^{٢} & ، س < ٠ \end{cases}$

د (٠) = ٢

، د (٠^{+}) = $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ $س^{٢}$ = ٠

، د (٠^{-}) = $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ (- $س^{٢}$) = ٠

∵ د (٠) ≠ $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ د (س)

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٠

⑪ د (س) = $\begin{cases} ١ & ، س > ٣ \\ ٢ & ، س = ٣ \\ -١ & ، س < ٣ \end{cases}$

د (٣) = ٢ ، د (٣^{+}) = ١ ، د (٣^{-}) = -١

∵ د (٣) ≠ د (٣^{+}) ≠ د (٣^{-})

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٣

⑫ د (س) = $\begin{cases} \frac{س^{٢} - س - ٢}{س - ٢} & ، س > ٢ \\ ٣ & ، س \leq ٢ \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{(س - ٢)(س + ١)}{س - ٢} & ، س > ٢ \\ ٣ & ، س \leq ٢ \end{cases}$

$= \begin{cases} س + ١ & ، س > ٢ \\ ٣ & ، س \leq ٢ \end{cases}$

∴ د (٢) = ٣

، د (٢^{+}) = $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ٣ = ٣

، د (٢^{-}) = نهـا (س ← ١^{-}) (س + ١) = ٢

، ∵ د (٢) = د (٢^{+}) = د (٢^{-})

∴ الدالة د متصلة عند س = ١

⑬ د (٢) = ٢ × ٤ + ٢ = ١٤

، نهـا (س ← ٢) د (س) = نهـا (س ← ٢) (س^{٧} − ٢^{٧}) / (س^{٤} − ٢^{٤})

= $\frac{٧}{٤}$ (٢)^{٣} = ١٤

∴ د (٢) = نهـا (س ← ٢) د (س)

∴ الدالة د متصلة عند س = ٢

⑭ د (٠) = ٠

، د (٠^{-}) = ٢ نهـا (س ← ٠^{-}) حا س = ٠

، د (٠^{+}) = نهـا (س ← ٠^{+}) (١ − حتا س) / س = ٠

∴ د (٠) = د (٠^{-}) = د (٠^{+})

∴ الدالة د متصلة عند س = ٠

⑮ د (٢) = $\frac{١}{٤}$

، د (٢^{+}) = نهـا (س ← ٢^{+}) (١ − $\frac{٣}{س^{٢}}$) = $\frac{١}{٤}$

، د (٢^{-}) = نهـا (س ← ٢^{-}) حا (س − ٢) / (س^{٢} − ٤)

= نهـا (س ← ٢^{-}) حا (س − ٢) / (س − ٢)

× نهـا (س ← ٢^{-}) ١ / (س + ٢) = ١ × $\frac{١}{٤}$ = $\frac{١}{٤}$

∵ د (٢) = د (٢^{-}) = د (٢^{+})

∴ الدالة د متصلة عند س = ٢

⑯ د (س) = { −س^{٢} + ٤ ، س ≤ ٠
{ ٤ ، س > ٠

د (٠) = ٤

، د (٠^{-}) = نهـا (س ← ٠^{-}) (−س^{٢} + ٤) = ٤

، د (٠^{+}) = ٤

∴ د (٠) = د (٠^{+}) = د (٠^{-})

∴ الدالة د متصلة عند س = ٠

⑰ د (س) = { (س − ١)(س + ٢) / |س + ٢| ، س ≠ −٢
{ ٢ ، س = −٢

= { س − ١ ، س > −٢
{ ٢ ، س = −٢
{ −س + ١ ، س < −٢

• عند س = −٢

د (−٢) = ٢

، د (-٢^{+}) = نهـا (س ← -٢^{+}) (س − ١) = −٤

، د (-٢^{-}) = نهـا (س ← -٢^{-}) (−س + ١) = ٤

∵ د (-٢^{+}) ≠ د (-٢^{-})

∴ الدالة د غير متصلة عند س = −٢

• عند س = ١

د (١) = صفر

، نهـا (س ← ١) د (س) = نهـا (س ← ١) (س − ١)

= صفر

∵ د (١) = نهـا (س ← ١) د (س)

∴ الدالة د متصلة عند س = ١

⑱ د (س) = { −س − ٢ ، س < −٢
{ س + ٢ ، −٢ ≤ س ≤ ٢
{ ١١ − ٣ س ، س > ٢

• عند س = −٢

د (−٢) = صفر

، د (-٢^{-}) = نهـا (س ← -٢^{-}) (−س − ٢) = صفر

، د (-٢^{+}) = نهـا (س ← -٢^{+}) (س + ٢) = صفر

∴ د (−٢) = د (-٢^{-}) = د (-٢^{+})

∴ الدالة د متصلة عند س = −٢

• عند س = ٢

د (٢) = ٥

، د (٢^{-}) = نهـا (س ← ٢^{-}) (س + ٣) = ٥

، د (٢^{+}) = نهـا (س ← ٢^{+}) (١١ − ٣ س) = ٥

∴ د (٢) = د (٢^{-}) = د (٢^{+})

∴ الدالة د متصلة عند س = ٢

⑲ د (٠) = ٣

، د (٠^{+}) = نهـا (س ← ٠^{+}) (س + ٣) / (س + ١) = ٣

، د (٠^{-}) = نهـا (س ← ٠^{-}) (٥ س^{٢} + حا^{٢} ٢ س) / (س ظا ٢ س)

= نهـا (س ← ٠^{-}) (٥ + (حا ٢ س / س)^{٢}) / (ظا ٢ س / س)

= (٥ + ٤) / ٣ = ٣

∴ د (٠) = د (٠^{+}) = د (٠^{-})

∴ الدالة د متصلة عند س = ٠

⑳ د (π) = ١

، نهـا (س ← π) د (س) = نهـا (س ← π) حا س / (π − س)

= نهـا ((π − س) ← ٠) حا (π − س) / (π − س) = ١

∴ د (π) = نهـا (س ← π) د (س)

∴ الدالة د متصلة عند س = π

٢

① د (−٢) = −٣ + أ

، نهـا (س ← −٢) د (س)

= نهـا (س ← −٢) (س + ٢)(س − ١) / (س + ٢) = −٤

، ∵ الدالة د متصلة عند س = −٢

∴ −٣ + أ = −٤ ∴ أ = −١

② نهـا (س ← ٢) د (س)

= نهـا (س ← ٢) (س − ٢)(س − ٣) / ((س − ٢)(س^{٢} + ٢ س + ٤))

= نهـا (س ← ٢) (س − ٣) / (س^{٢} + ٢ س + ٤) = $\frac{-١}{١٢}$

، د (٢) = −٢ / |أ|

، ∵ الدالة د متصلة عند س = ٢

∴ −$\frac{١}{١٢}$ = −٢ / |أ| ∴ |أ| = ٢٤ ∴ أ = ± ٢٤

③ د (١) = ك

، نهـا (س ← ١) د (س)

= نهـا (س ← ١) ($\sqrt{س + ٣}$ − ٢) / (س^{٢} − ١) × ($\sqrt{س + ٣}$ + ٢) / ($\sqrt{س + ٣}$ + ٢)

= نهـا (س ← ١) (س + ٣ − ٤) / ((س − ١)(س + ١)($\sqrt{س + ٣}$ + ٢))

= نهـا (س ← ١) ١ / ((س + ١)($\sqrt{س + ٣}$ + ٢)) = $\frac{١}{٨}$

∵ الدالة د متصلة عند س = ١ ∴ ك = $\frac{١}{٨}$

④ د (٠) = أ + ١

، نهـا (س ← ٠) د (س) = نهـا (س ← ٠) حا^{٢} ٢ س / (س ظا ٢ س)

= نهـا (س ← ٠) (حا ٢ س / س)^{٢} / (ظا ٢ س / س) = $\frac{٤}{٢}$

∵ الدالة د متصلة عند س = ٠

∴ أ + ١ = ٤/٢ ∴ أ = ١/٢

⑤ د(-٢) = -٨

، د(-٢^+) = نهـا (س ← -٢^+) (أ س + ب) = -٢ أ + ب

∵ الدالة د متصلة عند س = -٢

∴ -٢ أ + ب = -٨ (١)

د(٥) = ١٢

، د(٥^-) = نهـا (س ← ٥^-) (أ س + ب) = ٥ أ + ب

∵ الدالة د متصلة عند س = ٥

∴ ٥ أ + ب = ١٢ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ = ٣ ، ب = -٢

⑥ د(٢) = ٣

، د(٢^+) = نهـا (س ← ٢^+) (أ + ب س) = أ + ٢ ب

، د(٢^-) = نهـا (س ← ٢^-) (ب - أ س^٢) = ب - ٤ أ

∵ الدالة د متصلة عند س = ٢

∴ أ + ٢ ب = ٣ (١)

، ب - ٤ أ = ٣ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ أ = -١/٢ ، ب = ٥/٤

⑦ د(٠) = ك

، نهـا (س ← ٠) د(س)

= نهـا (س ← ٠) [(جا ٢س - ١)/س^٢ × (جا ٢س + ١)/(جا ٢س + ١)]

= نهـا (س ← ٠) [(جا^٢ ٢س - ١)/س^٢ × ١/(جا ٢س + ١)]

= نهـا (س ← ٠) (- جتا^٢ ٢س)/س^٢ × نهـا (س ← ٠) ١/(جا ٢س + ١)

= - نهـا (س ← ٠) (طا ٢س / س)^٢ × ١/٢ = -٢

، ∵ الدالة د متصلة عند س = ٠ ∴ ك = -٢

⑧ د(حـ^-) = ٢ - حـ^٢ ، د(حـ^+) = حـ

∵ الدالة د متصلة عند س = حـ

∴ ٢ - حـ^٢ = حـ ∴ حـ^٢ + حـ - ٢ = ٠

∴ (حـ - ١) (حـ + ٢) = ٠

∴ حـ = ١ أو حـ = -٢

⑨ د(٠) = ٠ ، نهـا (س ← ٠) د(س)

= نهـا (س ← ٠) (١ - جتا س)/(ك س) = ٠ × ١/ك

، ∵ الدالة د متصلة عند س = ٠

∴ ١/ك × ٠ = ٠ عندما ك ∈ ح - {٠}

٣

① (د)	② (أ)	③ (ب)
④ (د)	⑤ (جـ)	⑥ (أ)
⑦ (أ)	⑧ (جـ)	⑨ (أ)

٤

① نهـا (س ← ٣) (س^٢ - س - ٦)/(س - ٣)

= نهـا (س ← ٣) (س + ٢)(س - ٣)/(س - ٣) = ٥

إعادة التعريف :

د(س) = { (س^٢ - س - ٦)/(س - ٣) ، س ≠ ٣ ؛ ٥ ، س = ٣ }

② نهـا (س ← ١) (س^٣ - ١)/(س^٢ - ٣ س + ٢)

= نهـا (س ← ١) (س - ١)(س^٢ + س + ١)/((س - ١)(س - ٢)) = -٣

إعادة التعريف

د(س) = { (س^٣ - ١)/(س^٢ - ٣ س + ٢) ، س ≠ ١ ؛ -٣ ، س = ١ }

③ د(١^+) = نهـا (س ← ١^+) (س^٢ + ٢ س) = ٣

د(١^-) = نهـا (س ← ١^-) (٥ س - ١) = ٤

∵ د(١^+) ≠ د(١^-)

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكي تصبح متصلة عند س = ١

④ د(٢^+) = نهـا (س ← ٢^+) (س^٢ + ١) = ٥

، د(٢^-) = نهـا (س ← ٢^-) (س - ٢)(س + ٢)/(س - ٢) = ٤

، ∵ د(٢^+) ≠ د(٢^-)

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكي تصبح متصلة عند س = ٢

⑤ د(٠^+) = نهـا (س ← ٠^+) (٢ س + ١ - جتا س)/(٥ س)

= نهـا (س ← ٠^+) (٢/٥ + (١ - جتا س)/(٥ س)) = ٢/٥

، د(٠^-) = نهـا (س ← ٠^-) (٢ جا س)/(٥ س) = ٢/٥

∴ نهـا (س ← ٠) د(س) = ٢/٥

إعادة التعريف

د(س) = { (٢ س + ١ - جتا س)/(٥ س) ، س > ٠ ؛ ٢/٥ ، س = ٠ ؛ ٢/٥ جا س ، س < ٠ }

⑥ د(س) = { (س - ٣)/(س - ٣) ، س > ٣ ؛ -(س - ٣)/(س - ٣) ، س < ٣ }

= { ١ ، س > ٣ ؛ -١ ، س < ٣ }

د(٣^+) = ١ ، د(٣^-) = -١

∵ د(٣^+) ≠ د(٣^-)

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكي تصبح متصلة عند س = ٣

⑦ نهـا (س ← ٨) (س^٢ - ٦٤)/(∛س - ٢) = نهـا (س ← ٨) (س^٢ - ٨^٢)/(س^(١/٣) - ٨^(١/٣))

= ٣ × ٢ × ٨^(٢ - ١/٣) = ١٩٢

إعادة التعريف

د(س) = { (س^٢ - ٦٤)/(∛س - ٢) ، س ≠ ٨ ؛ ١٩٢ ، س = ٨ }

⑧ د(س) = { (س + س)/س ، س > ٠ ؛ (- س + س)/س ، س < ٠ }

= { ٢ ، س > ٠ ؛ ٠ ، س < ٠ }

د(٠^+) = ٢ ، د(٠^-) = صفر

∵ د(٠^+) ≠ د(٠^-)

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكي تصبح متصلة عند س = ٠

⑨ نهـا (س ← ٤) [٢/(س - ٤) - ١٢/((س - ٤)(س + ١))]

= نهـا (س ← ٤) (٢ (س + ١) - ١٢)/((س - ٤)(س + ١))

= نهـا (س ← ٤) (٢ س - ١٠)/((س - ٤)(س + ١))

= نهـا (س ← ٤) ٢ (س - ٤)/((س - ٤)(س + ١)) = ٢/٥

إعادة التعريف

د(س) = { ٢/(س - ٤) - ١٢/(س^٢ - ٣ س - ٤) ، س ≠ ٤ ؛ ٢/٥ ، س = ٤ }

(١٠) د (س) = { جاس/س ، س > ٠ ؛ − جاس/س ، س < ٠ }

∵ د (٠$^{+}$) = نهـــا (س ← ٠$^{+}$) جاس/س = ١

، د (٠$^{-}$) = نهـــا (س ← ٠$^{-}$) − جاس/س = −١

، ∵ د (٠$^{+}$) ≠ د (٠$^{-}$)

∴ الدالة لا يمكن إعادة تعريفها لكى تصبح متصلة عند س = ٠

ثانيا تمارين على الاتصال على فترة

١

① ∵ الدالة كثيرة حدود ∴ د متصلة على ح

② ∵ الدالة كثيرة حدود ∴ د متصلة على ح

③ ∵ الدالة كسرية

، س − ٣ = ٠ ∴ س = ٣

∴ الدالة د متصلة على ح − {٣}

④ ∵ الدالة كسرية

، س^{٢} − ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س − ٣) (س − ٢) = ٠

∴ س = ٣ أ، س = ٢

∴ د متصلة على ح − {٢ ، ٣}

⑤ ∵ الدالة كسرية

، س^{٤} − ١٣ س^{٢} + ٣٦ = ٠

∴ (س^{٢} − ٩) (س^{٢} − ٤) = ٠

س = ± ٣ أ، س = ± ٢

∴ د متصلة على ح − {٣ ، −٣ ، ٢ ، −٢}

⑥ ∵ الدالة كسرية

، س^{٢} + س + ١ = ٠

لا توجد أصفار للمقام ∴ د متصلة على ح

⑦ ∵ الدالة كسرية

، س^{٣} − س = ٠ ∴ س (س^{٢} − ١) = ٠

∴ س = ٠ أ، س = ± ١

∴ د متصلة على ح − {٠ ، ١ ، −١}

⑧ ∵ الدالة على شكل مقياس لكثيرة حدود

∴ د متصلة على ح

⑨ ∵ كل من الدالتين س^{٣} ، جا ٢ س متصلة على ح

∴ د متصلة على ح

⑩ ∵ كل من الدالتين جا س ، ٣ جتا (س + ١) متصلة على ح ∴ د متصلة على ح

⑪ ∵ كل من الدالتين (٣ س + ٤)^{٢} ، جا ٢ س متصلة على ح ∴ د متصلة على ح

⑫ ∵ الدالة كسرية

، |س| − ٢ = ٠

∴ |س| = ٢ ∴ س = ± ٢

∴ د متصلة على ح − {٢ ، −٢}

⑬ ∵ الدالة كسرية

، |س| + ١ = ٠ |س| = −١ مرفوض

∴ د متصلة على ح

⑭ ∵ س − ٢ > ٠ ∴ س > ٢

∴ د متصلة على]٢ ، ∞[

⑮ ∵ الدوال س^{٢} ، (س + ١) ، جا ٣ س متصلة على ح

∴ د متصلة على ح − {−١}

⑯ ∵ س − ٤ ≥ ٠ ∴ س ≥ ٤

∴ س ∈ [٤ ، ∞[

∴ د متصلة على الفترة [٤ ، ∞[− {٦}

⑰ ∵ س − ٣ ≥ ٠

∴ س ≥ ٣ ∴ س ∈ [٣ ، ∞[

∴ د متصلة على الفترة [٣ ، ∞[− {٢ ، −٢}

أى أن د متصلة على الفترة [٣ ، ∞[

⑱ ∵ س + ٢ > ٠

∴ س > −٢ ∴ س ∈]−٢ ، ∞[

∴ د متصلة على الفترة]−٢ ، ∞[− {٠}

⑲ ∵ س + ٢ ≥ ٠

∴ س ≥ −٢ ∴ س ∈ [−٢ ، ∞[

، س + ٢ ≠ ١ ∴ س ≠ −١

∴ د متصلة على [−٢ ، ∞[− {−١}

⑳ ∵ س + ٢ ≥ ٠

س ≥ −٢ ∴ س ∈ [−٢ ، ∞[

، ٣ − س ≥ ٠ ٣ ≥ س

∴ س ∈]−∞ ، ٣]

∴ د متصلة على [−٢ ، ٣]

㉑ ٢٥ − س^{٢} > ٠ س^{٢} < ٢٥

|س| < ٥ −٥ < س < ٥

∴ د متصلة على الفترة]−٥ ، ٥[

㉒ ٥ − |س| ≥ ٠

|س| ≤ ٥ ∴ −٥ ≤ س ≤ ٥

∴ د متصلة على الفترة [−٥ ، ٥]

㉓ ∵ جا س = ٠ عندما س = π ن

∴ د متصلة على

ح − {س : س = π ن ، ن ∈ ص}

㉔ ∵ جتا س = ٠ عندما س = $\frac{\pi}{٢}$ + π ن

∴ د متصلة على

ح − {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + π ن ، ن ∈ ص}

㉕ كل من الدالتين جا ٣ س ، جتا ٥ س متصلة على ح

، ∵ ١ − جتا س = ٠ ∴ جتا س = ١

∴ س = ٢ π ن

∴ د متصلة على

ح − {س : س = ٢ π ن ، ن ∈ ص}

㉖ ∵ ١ + جا س = ٠ ∴ جا س = −١

∴ س = $\frac{٣\pi}{٢}$ + ٢ π ن

∴ د متصلة على

ح − {س : س = $\frac{٣\pi}{٢}$ + ٢ π ن ، ن ∈ ص}

㉗ كل من الدالتين (جا^{٢} س ، جتا س) متصلة على ح

، س^{٢} − ٩ = ٠ ∴ س = ± ٣

∴ د متصلة على ح − {٣ ، −٣}

㉘ د متصلة على

ح − {س : س = $\frac{\pi}{٢}$ + ن π ، ن ∈ ص}

㉙ ∵ ظا س متصلة على

ح − {$\frac{\pi}{٢}$ + ن π ، ن ∈ ص}

، س^{٢} − ٩ = ٠ ∴ س = ± ٣

∴ الدالة د متصلة على

ح − {٣ ، −٣ ، $\frac{\pi}{٢}$ + ن π} حيث ن ∈ ص

٢

① **أولاً** : ∵ د (س) = س^{٢} + ١ كثيرة الحدود

∴ د متصلة على]- ∞ ، ١[

، د (س) = ٢ س كثيرة حدود

∴ د متصلة على]١ ، ∞[

ثانيًا : ∵ د (١) = ٢

، د (١$^{-}$) = نهـا$_{س \leftarrow ١^{-}}$ (س^{٢} + ١) = ٢

، د (١$^{+}$) = نهـا$_{س \leftarrow ١^{+}}$ (٢ س) = ٢

∵ د (١) = د (١$^{-}$) = د (١$^{+}$)

∴ د متصلة عند س = ١ ∴ د متصلة على ح

② **أولاً** : ∵ د (س) = س^{٢} كثيرة الحدود

∴ د متصلة على]- ∞ ، ٢[

، ∵ د (س) = ٥ س - ٤ كثيرة حدود

∴ د متصلة على]٢ ، ∞[

ثانيًا : ∵ د (٢) = ١١

، د (٢$^{-}$) = نهـا$_{س \leftarrow ٢^{-}}$ س^{٢} = ٩

، د (٢$^{+}$) = نهـا$_{س \leftarrow ٢^{+}}$ (٥ س - ٤) = ١١

∵ د (٢$^{-}$) ≠ د (٢$^{+}$)

∴ د غير متصلة عند س = ٢

∴ د متصلة على ح - {٢}

③ **أولاً** :

∵ د (س) = س^{٢} - ٢ س + ٢ كثيرة الحدود

∴ د متصلة على]-∞ ، ٢[

، د (س) = ٢ كثيرة حدود

∴ د متصلة على]٢ ، ٤[

∵ د (س) = ٦ - س^{٢} كثيرة حدود

∴ د متصلة على]٤ ، ∞[

ثانيًا : د (٢) = ٢

، د (٢$^{-}$) = نهـا$_{س \leftarrow ٢^{-}}$ (س^{٢} - ٢ س + ٢) = ٢

، د (٢$^{+}$) = ٢

∵ د (٢) = د (٢$^{-}$) = د (٢$^{+}$)

∴ د متصلة عند س = ٢

ثالثًا : د (٤) = ٢ ، د (٤$^{-}$) = ٢

، د (٤$^{+}$) = نهـا$_{س \leftarrow ٤^{+}}$ (٦ - س^{٢}) = - ١٠

∵ د (٤$^{+}$) ≠ د (٤$^{-}$)

∴ د غير متصلة عند س = ٤

∴ د متصلة على ح - {٤}

④ **أولاً** : د (س) = ١ + جا س

متصلة على]٠ ، $\frac{\pi}{٢}$[

، د (س) = ١ - جتا ٢ س

متصلة على]$\frac{\pi}{٢}$ ، ∞[

ثانيًا : د (٠) = ١

، د (٠$^{+}$) = نهـا$_{س \leftarrow ٠^{+}}$ (١ + جا س) = ١

∴ د (٠) = د (٠$^{+}$)

∴ د متصلة من اليمين عند س = ٠

ثالثًا : د ($\frac{\pi}{٢}$) = ٢

، د ($\frac{\pi}{٢}^{-}$) = نهـا$_{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}^{-}}$ (١ + جا س) = ٢

، د ($\frac{\pi}{٢}^{+}$) = نهـا$_{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}^{+}}$ (١ - جتا ٢ س) = ٢

∴ د ($\frac{\pi}{٢}^{-}$) = د ($\frac{\pi}{٢}^{+}$) = د ($\frac{\pi}{٢}$)

∴ د متصلة عند س = $\frac{\pi}{٢}$

∴ د متصلة على [٠ ، ∞[

⑤ **أولاً** : د (س) = جا س

متصلة على]$\frac{-\pi}{٤}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$]

، د (س) = جتا س

متصلة على]$\frac{٣\pi}{٤}$ ، ٢ π[

ثانيًا : ∴ د ($\frac{-\pi}{٤}$) = $\frac{-\sqrt{٢}}{٢}$

، د ($\frac{-\pi}{٤}^{+}$) = نهـا$_{س \leftarrow (\frac{-\pi}{٤})^{+}}$ جا س = $-\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

∵ د ($\frac{-\pi}{٤}$) = د ($-\frac{\pi}{٤}^{+}$)

∴ د متصلة من اليمين عند س = $-\frac{\pi}{٤}$

ثالثًا : د ($\frac{٣\pi}{٤}$) = $\frac{-\sqrt{٢}}{٢}$

د ($\frac{٣\pi}{٤}^{+}$) = نهـا$_{س \leftarrow \frac{٣\pi}{٤}^{+}}$ جتا س = $\frac{-\sqrt{٢}}{٢}$

د ($\frac{٣\pi}{٤}^{-}$) = نهـا$_{س \leftarrow \frac{٣\pi}{٤}^{-}}$ جا س = $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$

∵ د $(\frac{٣\pi}{٤})^{-}$ ≠ د $(\frac{٣\pi}{٤})^{+}$

∴ د غير متصلة عند س = ($\frac{٣\pi}{٤}$)

رابعًا : د (٢ π) = ١

د (٢ π^{-}) = نهـا$_{س \leftarrow ٢\pi^{-}}$ جتا س = ١

∴ د (٢ π) = د (٢ π^{-})

∴ د متصلة من اليسار عند س = ٢ π

∴ د متصلة على الفترة [-$\frac{\pi}{٤}$ ، ٢ π] - {$\frac{٣\pi}{٤}$}

⑥ **أولاً** : د (س) = $\frac{\text{س ظا س + جا}^{٢}\text{ ٢ س}}{\text{٥ س}^{٢}}$

متصلة على]-$\frac{\pi}{٤}$ ، ٠[

، د (س) = ٢ جتا ٢ س متصلة على]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[

ثانيًا : د (٠) = ٢ ، د (٠$^{-}$)

= نهـا$_{س \leftarrow ٠^{-}}$ $\frac{\text{س ظا س + جا}^{٢}\text{ ٢ س}}{\text{٥ س}^{٢}}$

= نهـا$_{س \leftarrow ٠^{-}}$ $\frac{\frac{\text{ظا س}}{\text{س}} + (\frac{\text{جا ٢ س}}{\text{س}})^{٢}}{٥}$

= ٢

، د (٠$^{+}$) = نهـا$_{س \leftarrow ٠^{+}}$ (٢ جتا ٢ س) = ٢

، ∵ د (٠$^{+}$) = د (٠$^{-}$) = د (٠)

∴ د متصلة عند س = ٠

∴ د متصلة على]-$\frac{\pi}{٤}$ ، $\frac{\pi}{٤}$[

⑦ د (س) = $\frac{(\text{س} + ٣)^{٤} - ٨١}{\text{س}}$

متصلة على]- ∞ ، ٠[،]٠ ، ∞[، د (٠) = ١٠٨

، نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ د (س) = نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ $\frac{(\text{س} + ٣)^{٤} - ٣^{٤}}{\text{س}}$

= ٤ (٣)^{٣} = ١٠٨

∵ د (٠) = نهـا$_{س \leftarrow ٠}$ د (س)

∴ د متصلة عند س = ٠ ∴ د متصلة على ح

⑧

∵ د (س) = $\begin{cases} ٥ + \text{س}^{٢} & ، \text{س} \le ٠ \\ ٥ & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$

د (س) = ٥ + س^{٢} كثيرة حدود متصلة على]-∞ ، ٠[

، د (س) = ٥ كثيرة حدود متصلة]٠ ، ∞[

، د (٠) = ٥ د (٠$^{+}$) = ٥ د (٠$^{-}$) = ٥

∵ د (٠) = د (٠$^{-}$) = د (٠$^{+}$)

∴ د متصلة عند س = ٠ ∴ د متصلة على ح

٣

∵ د متصلة عند س = ١

∴ د (١⁺) = د (١⁻) = د (١)

∴ ٢أ + ب = ب + ٤ = ٧

∴ ب = ٣ ، أ = ٤

٤

∵ د متصلة على [− π ، π]

∴ د متصلة عند س = ٠   ∴ د (٠⁻) = د (٠⁺)

∴ نهـا_{س ← ٠} $\dfrac{\text{س} + \text{جا } ٢ \text{ س}}{\text{جا } \frac{١}{٢} \text{ س}}$ = نهـا_{س ← ٠} (س + ك)

∴ نهـا_{س ← ٠} $\dfrac{١ + \dfrac{\text{جا } ٢ \text{ س}}{\text{س}}}{\dfrac{\text{جا } \frac{١}{٢} \text{ س}}{\text{س}}}$ = ك

∴ $\dfrac{١ + ٢}{\frac{١}{٢}}$ = ك   ∴ ك = ٦

٥

∵ د (س) متصلة على ح

∴ د متصلة عند س = −١

∴ د (−١⁻) = د (−١⁺)

∴ نهـا_{س ← −١⁻} (٤ س) = نهـا_{س ← −١⁺} (أ س + ب)

∴ −٤ = −أ + ب   (١)

، د متصلة عند س = ٣

∴ د (٣⁻) = د (٣⁺)

∴ نهـا_{س ← ٣⁻} (أ س + ب) = نهـا_{س ← ٣⁺} (−٢ س)

∴ ٣أ + ب = −٦   (٢)

من (١) ، (٢) ∴ أ = −$\frac{١}{٢}$ ب = −$\frac{٩}{٢}$

٦

∵ د (س) متصلة على ح

∴ د (س) لها نهاية عند س = ٩

، ∵ المقام = صفر عندما س = ٩

∴ $\sqrt{٩ - أ}$ − ١ = ٠   ∴ $\sqrt{٩ - أ}$ = ١

∴ أ = ٨

، نهـا_{س ← ٩} د (س) = د (٩)

∴ نهـا_{س ← ٩} $\dfrac{\sqrt{\text{س} - ٨} - ١}{\sqrt{\text{س}} - ٣}$ = ٩ − ب

∴ نهـا_{س ← ٩} $\dfrac{\sqrt{\text{س} - ٨} - ١}{\sqrt{\text{س}} - ٣}$ × $\dfrac{\sqrt{\text{س} - ٨} + ١}{\sqrt{\text{س} - ٨} + ١}$ × $\dfrac{\sqrt{\text{س}} + ٣}{\sqrt{\text{س}} + ٣}$

= ٩ − ب

∴ نهـا_{س ← ٩} $\dfrac{(\text{س} - ٨ - ١)(\sqrt{\text{س}} + ٣)}{(\text{س} - ٩)(\sqrt{\text{س} - ٨} + ١)}$ = ٩ − ب

∴ $\frac{٦}{٢}$ = ٩ − ب   ∴ ب = ٦

٧

① (د)	② (ب)	③ (ب)
④ (أ)	⑤ (جـ)	⑥ (جـ)
⑦ (ب)	⑧ (د)	⑨ (د)

٨

① **أولاً :**

د (س) = { س + ١ ، س < ١ ؛ ٣ س − ١ ، ١ ≤ س ≤ ٢ ؛ ٤ س − س² ، س > ٢ }

∵ د (س) = س + ١ كثيرة حدود متصلة]− ∞ ، ١[

د (س) = ٣ س − ١ كثيرة حدود متصلة]١ ، ٢[

د (س) = ٤ س − س² كثيرة حدود متصلة]٢ ، ∞[

ثانيًا : د (١) = ٢

، د (١⁻) = نهـا_{س ← ١⁻} (س + ١) = ٢

، د (١⁺) = نهـا_{س ← ١⁺} (٣ س − ١) = ٢

∵ د (١⁻) = د (١⁺) = د (١)

∴ د متصلة عند س = ١

ثالثًا : د (٢) = ٥

د (٢⁻) = نهـا_{س ← ٢⁻} (٣ س − ١) = ٥

د (٢⁺) = نهـا_{س ← ٢⁺} (٤ س − س²) = ٤

∵ د (٢) ≠ د (٢)⁺   ∴ د غير متصلة عند س = ٢

∴ د متصلة على ح − {٢}

②

د (س) = { س² + ٢ س ، س < −٢ ؛ $\sqrt{٤ - \text{س}^٢}$ ، −٢ ≤ س ≤ ٢ ؛ س² + ٢ س ، س > ٢ }

أولاً :

د (س) = س² + ٢ س كثيرة حدود

متصلة على]− ∞ ، −٢[

، د (س) = $\sqrt{٤ - \text{س}^٢}$ متصلة على [−٢ ، ٢]

، د (س) = س² + ٢ س كثيرة حدود متصلة على

]−٢ ، ∞[

ثانيًا : د (−٢) = ٠

، د (−٢)⁺ = نهـا_{س ← −٢⁺} $\sqrt{٤ - \text{س}^٢}$ = ٠

، د (−٢)⁻ = نهـا_{س ← −٢⁻} (س² + ٢ س) = ٠

∵ د (−٢) = د (−٢⁺) = د (−٢⁻)

∴ د متصلة عند س = −٢

ثالثًا : د (٢) = ٠

، د (٢⁻) = نهـا_{س ← ٢⁻} $\sqrt{٤ - \text{س}^٢}$ = ٠

، د (٢⁺) = نهـا_{س ← ٢⁺} (س² + ٢ س) = ٨

∵ د (٢⁻) ≠ د (٢⁺)   ∴ د غير متصلة عند س = ٢

∴ د متصلة على ح − {٢}

٩

∵ الدالة متصلة على ح

∴ المعادلة (س² + أ س + ٩ = ٠) ليس لها حل فى ح

∴ ب² − ٤ أ جـ < ٠

∴ أ² − ٤ × ١ × ٩ < ٠

∴ أ² < ٣٦

∴ |أ| < ٦

∴ −٦ < أ < ٦

∴ أ ∈]−٦ ، ٦[

١٠

∵ الدالة متصلة على ح

∴ المعادلة (س² + ٦ س + أ = ٠) ليس لها حل فى ح

∴ ب² − ٤ أ جـ < ٠

∴ ٣٦ − ٤ × ١ × أ < ٠   ∴ −٤ أ < −٣٦

∴ أ > ٩   ∴ أ ∈]٩ ، ∞[

١١

∵ د (س) = { −س ، س < ٠ ؛ ١ ، س ≥ ٠ }

∴ د (٠) = ١ ، د (٠⁺) = نهـا_{س ← ٠⁺} (١) = ١

، د (٠⁻) = نهـا_{س ← ٠⁻} (−س) = صفر

، ∵ د (٠⁺) ≠ د (٠⁻)

∴ الدالة د غير متصلة عند س = ٠

، ∵ ى (س) = $\begin{cases} ١ & ، س < ٠ \\ س & ، س \geq ٠ \end{cases}$

∴ د (٠) = صفر

، د (٠⁺) = نهـــا (س) = صفر (س ← ٠⁺)

، د (٠⁻) = نهـــا (١) = ١ (س ← ٠⁻)

∴ د (٠⁺) ≠ د (٠⁻)

∴ الدالة ى غير متصلة عند س = ٠

، ∵ (د ∘ ى) (س) = $\begin{cases} -س & ، س < ٠ \\ س & ، س \geq ٠ \end{cases}$

∴ (د ∘ ى) (٠) = صفر

، (د ∘ ى) (٠⁺) = نهـــا (س) = صفر (س ← ٠⁺)

(د ∘ ى) (٠⁻) = نهـــا (- س) = صفر (س ← ٠⁻)

∴ (د ∘ ى) (٠⁺) = (د ∘ ى) (٠⁻) = (د ∘ ى) (٠)

∴ الدالة (د ∘ ى) متصلة عند س = ٠

١٢

① د (٤) = ١ ، نهـــا د (س) = -١ (س ← ٤)

، ∵ د (٤) ≠ نهـــا د (س) (س ← ٤)

∴ د غير متصلة عند س = ٤

② ى (٤) = - ٦ ، نهـــا ى (س) (س ← ٤)

= نهـــا (٤ س - ١٠) = ٦ (س ← ٤)

، ∵ ى (٤) ≠ نهـــا ى (س) (س ← ٤)

∴ ى غير متصلة عند س = ٤

③ بوضع ن (س) = د (س) . ى (س)

= $\begin{cases} -٤ س + ١٠ & ، س \neq ٤ \\ -٦ & ، س = ٤ \end{cases}$

، ∵ ن (٤) = -٦

، نهـــا ن (س) = نهـــا (- ٤ س + ١٠) (س ← ٤)

= -٦

، ∵ ن (٤) = نهـــا ن (س) (س ← ٤)

∴ ن متصلة عند س = ٤

④ بوضع ه (س) = | د (س) | = $\begin{cases} ١ & ، س \neq ٤ \\ ١ & ، س = ٤ \end{cases}$

، ∵ ه (٤) = نهـــا ه (س) = ١ (س ← ٤)

∴ ه متصلة عند س = ٤

⑤ بوضع هـ (س) = ى (س) - ٦ د (س)

= $\begin{cases} ٤ س - ٤ & ، س \neq ٤ \\ -١٢ & ، س = ٤ \end{cases}$

، ∵ هـ (٤) = -١٢ ، نهـــا هـ (س) = ١٢ (س ← ٤)

، ∵ هـ (٤) ≠ نهـــا هـ (س) (س ← ٤)

∴ هـ غير متصلة عند س = ٤

⑥ بوضع ك (س) = ى (د (س))

= $\begin{cases} -١٤ & ، س \neq ٤ \\ -٦ & ، س = ٤ \end{cases}$

، ∵ ك (٤) = -٦ ، نهـــا ك (س) = -١٤ (س ← ٤)

∴ ك (٤) ≠ نهـــا ك (س) (س ← ٤)

∴ ك غير متصلة عند س = ٤

إجـابـات الـوحـدة الرابعة

إجـابـات تمـاريـن 19

١ ① (جـ) ② (أ) ③ (د) ④ (جـ) ⑤ (أ)
⑥ (جـ) ⑦ (جـ) ⑧ (أ) ⑨ (ب) ⑩ (جـ)
⑪ (د) ⑫ (أ)

٢

∵ ق (∠ ع) = ١٨٠° - (٨٠° + ٦٠°) = ٤٠°

∴ $\frac{\text{س}}{\text{جا } ٨٠°} = \frac{\text{ص}}{\text{جا } ٦٠°} = \frac{١٠}{\text{جا } ٤٠°}$

∴ س = $\frac{١٠ \text{ جا } ٨٠°}{\text{جا } ٤٠°}$ = ١٥ سم

، ص = $\frac{١٠ \text{ جا } ٦٠°}{\text{جا } ٤٠°}$ = ١٣ سم

٣

∵ ق (∠ حـ) = ١٨٠° - (١١٢° + ٣٢°) = ٣٥°

∴ $\frac{\text{ب}}{\text{جا } ٣٢°} = \frac{١٩}{\text{جا } ٣٥°}$

∴ ب = $\frac{١٩ \text{ جا } ٣٢°}{\text{جا } ٣٥°}$ = ١٨,٠٤ سم ، ٢ نق = $\frac{١٩}{\text{جا } ٣٥°}$

∴ نق = $\frac{١٩}{٢ \text{ جا } ٣٥°}$ = ١٦,٥٦ سم

٤

① ∵ ق (∠ ل) = ١٨٠° - (١٠٠° + ٤٠°) = ٤٠°

∴ $\frac{\text{ل}}{\text{جا } ٤٠°} = \frac{٦٨,٤}{\text{جا } ١٠٠°}$

∴ ل = $\frac{٦٨,٤ \text{ جا } ٤٠°}{\text{جا } ١٠٠°}$ = ٤٤,٦٤ سم

② ٢ نق = $\frac{٦٨,٤}{\text{جا } ١٠٠°}$ ∴ نق = ٣٤,٧٣ سم

③ مساحة Δ ل م ه = $\frac{١}{٢}$ ل م جا ه

= $\frac{١}{٢}$ × ٤٤,٦٤ × ٦٨,٤ جا ٤٠°

= ٩٨١ سم²

٥

∵ ق (∠ م) = ١٨٠° - (٥٢ ١٨° + ١٧ ٤٤°) = ٥١ ١١٦°

∴ $\frac{\text{م ه}}{\text{جا } ٥٢ ١٨°} = \frac{\text{ل م}}{\text{جا } ١٧ ٤٤°} = \frac{٣٥}{\text{جا } ٥١ ١١٦°}$

∴ م ه = $\frac{٣٥ \text{ جا } ٥٢ ١٨°}{\text{جا } ٥١ ١١٦°}$ = ١٢,٧ سم

، ل م = $\frac{٣٥ \text{ جا } ١٧ ٤٤°}{\text{جا } ٥١ ١١٦°}$ = ٢٧,٤ سم

، نق = $\frac{٣٥}{٢ \text{ جا } ٥١ ١١٦°}$

∴ مساحة الدائرة = π $\left(\frac{٣٥}{٢ \text{ جا } ٥١ ١١٦°}\right)^2$

= ١٢٠٨,٧ سم²

٦

∵ ق (∠ ب) = ١٨٠° - (٤٠° + ٨٠°) = ٦٠°

∴ ∠ حـ أكبر الزوايا قياسًا.

∴ حـ طول أكبر الأضلاع. ∴ $\frac{\text{حـ}}{\text{جا } ٨٠°} = \frac{١٠}{\text{جا } ٦٠°}$

∴ حـ = $\frac{١٠ \text{ جا } ٨٠°}{\text{جا } ٦٠°}$ = ١١ سم

٧

∵ ق (∠ حـ) = ١٨٠° - (١٠٠° + ١٥°) = ٦٥°

∴ ∠ ب أصغر الزوايا قياسًا.

∴ ب طول أصغر الأضلاع. ∴ $\frac{\text{ب}}{\text{جا } ١٥°} = \frac{٤,٥}{\text{جا } ٦٥°}$

∴ ب = $\frac{٤,٥ \text{ جا } ١٥°}{\text{جا } ٦٥°}$ = ١,٢ سم

٨

∵ نق = $\frac{\text{٧}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢ جا ٦٠}^\circ}$ = ٧ سم

∴ مساحة الدائرة = $\frac{\text{٢٢}}{\text{٧}}$ × ٧² = ١٥٤ سم²

، محيط الدائرة = ٢ × $\frac{\text{٢٢}}{\text{٧}}$ × ٧ = ٤٤ سم

٩

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٤٥°) = ٧٥°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ٦٠}^\circ} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ٤٥}^\circ} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا ٧٥}^\circ}$

∴ $\frac{\text{أ}}{\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}} = \frac{\text{ب}}{\frac{\sqrt{\text{٢}}}{\text{٢}}} = \frac{\text{حـ}}{\frac{\sqrt{\text{٦}}+\sqrt{\text{٢}}}{\text{٤}}}$

∴ أ : ب : حـ

= $\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}} : \frac{\sqrt{\text{٢}}}{\text{٢}} : \frac{\sqrt{\text{٦}}+\sqrt{\text{٢}}}{\text{٤}}$ (بالضرب × ٢ $\sqrt{\text{٢}}$)

= $\sqrt{\text{٦}}$: ٢ : $\sqrt{\text{٣}}$ + ١

١٠

∵ نق = $\frac{\text{١٣}}{\text{٢ جا ٥٣}^\circ \text{ ٨َ}}$ ≈ ٨.١ سم ، $\frac{\text{١٣}}{\text{جا ٥٣}^\circ \text{ ٨َ}} = \frac{\text{١٥}}{\text{جا حـ}}$

∴ جا حـ = $\frac{\text{١٥ جا ٥٣}^\circ \text{ ٨َ}}{\text{١٣}}$ (موجبة)

∴ ∠حـ حادة أو منفرجة

∴ ق(∠حـ) ≈ ٦٧° ٢٣َ ٩ً ، ١١٢° ٣٦َ ٥١ً

١١

∵ $\frac{\text{٨}}{\text{جا ٢٥}^\circ} = \frac{\text{٦}}{\text{جا ب}}$ ∴ جا ب = $\frac{\text{٦ جا ٢٥}^\circ}{\text{٨}}$

∴ ق(∠ب) = ٥ ٤ً ٢٨َ ٢٥° والحل الآخر مرفوض.

١٢

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١٣َ ٥٧° + ١٨َ ٦٤°) = ٢٩َ ٥٨°

، ∵ $\frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}} = \frac{\text{أ + ب + حـ}}{\text{جا أ + جا ب + جا حـ}}$

∴ $\frac{\text{٨.٧}}{\text{جا ٢٩َ ٥٨}^\circ} = \frac{\text{محيط } \Delta \text{ أ ب حـ}}{\text{جا ١٣َ ٥٧}^\circ \text{ + جا ٢٩َ ٥٨}^\circ \text{ + جا ١٨َ ٦٤}^\circ}$

∴ محيط ∆ أ ب حـ = ٢٦.٥ سم

١٣

∵ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٤٥° + ٦٠°) = ٧٥°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ٧٥}^\circ} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ٤٥}^\circ} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا ٦٠}^\circ}$ = ٤٠

∴ أ = ٤٠ جا ٧٥° ≈ ٣٨.٦ سم

، ب = ٤٠ جا ٤٥° ≈ ٢٨.٣ سم

، حـ = ٤٠ جا ٦٠° = ٣٤.٦ سم

∴ مساحة المثلث = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ٣٨.٦ × ٢٨.٣ × جا ٦٠°

= ٤٧٣ سم²

، محيط المثلث = ٣٨.٦ + ٢٨.٣ + ٣٤.٦ ≈ ١٠٢ سم

١٤

∵ ∆ أ ب حـ متساوى الساقين.

∴ ق(∠ب) = ق(∠حـ) = ٣٠°

، ∵ $\frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{\text{حـ}}{\text{جا ٣٠}^\circ}$ = ٢٤

∴ حـ = ٢٤ جا ٣٠° = ١٢ سم ∴ ب = حـ = ١٢ سم

∴ مساحة المثلث = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ١٢ × ١٢ جا ١٢٠° = ٦٢.٤ سم²

١٥

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (١٥° + ١٥°) = ١٥٠°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ١٥}^\circ} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ١٥}^\circ} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا ١٥٠}^\circ}$

∴ إحدى النسب = $\frac{\text{أ + ب + حـ}}{\text{جا ١٥}^\circ \text{ + جا ١٥}^\circ \text{ + جا ١٥٠}^\circ}$

= $\frac{\text{٢٥}}{\text{جا ١٥}^\circ \text{ + جا ١٥}^\circ \text{ + جا ١٥٠}^\circ}$ = ٢٤.٥٧

∴ ٢ نق = ٢٤.٥٧ ∴ نق = ١٢.٢٨٥ سم

∴ مساحة الدائرة = π × (١٢.٢٨٥)² = ٤٧٤ سم²

١٦

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٤٤° + ٦٦°) = ٧٠°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ٤٤}^\circ} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ٦٦}^\circ} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا ٧٠}^\circ}$

= $\frac{\text{٤٠}}{\text{جا ٤٤}^\circ \text{ + جا ٦٦}^\circ \text{ + جا ٧٠}^\circ}$

∴ أ ≈ ١٠.٩ سم ، ب ≈ ١٤.٣ سم ، حـ ≈ ١٤.٨ سم

١٧

∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٢٠° + ٦٠°) = ١٠٠°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ٢٠}^\circ} = \frac{\text{١٢}}{\text{جا ١٠٠}^\circ}$ ∴ أ = $\frac{\text{١٢ جا ٢٠}^\circ}{\text{جا ١٠٠}^\circ}$ ≈ ٤.٢ سم

، مساحة المثلث = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ٤.٢ × ١٢ × جا ٦٠° ≈ ٢٢ سم²

١٨

∵ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٨٢° + ٥٦°) = ٤٢°

، ∵ مساحة ∆ أ ب حـ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ أ ب جا حـ

∴ ٤٥٠ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ أ ب جا ٥٦° ∴ ب = $\frac{\text{٩٠٠}}{\text{أ جا ٥٦}^\circ}$

، ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ٤٢}^\circ} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ٨٢}^\circ}$ ∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ٤٢}^\circ} = \frac{\text{٩٠٠}}{\text{أ جا ٥٦}^\circ \text{ جا ٨٢}^\circ}$

∴ أ² = $\frac{\text{٩٠٠ جا ٤٢}^\circ}{\text{جا ٥٦}^\circ \text{ جا ٨٢}^\circ}$ ∴ أ ≈ ٢٧ سم

١٩

∵ ٤٣.٢ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × أب × ١٢ × ٠.٦ ∴ أب = ١٢ سم

، ∵ ق(∠أ) = ٣٦° ٥٢َ

∴ ق(∠ب) = ق(∠حـ) = $\frac{\text{١٨٠}^\circ \text{ − ٣٦}^\circ \text{ ٥٢َ}}{\text{٢}}$ = ٧١° ٣٤َ

∴ $\frac{\text{ب حـ}}{\text{٠.٦}} = \frac{\text{١٢}}{\text{جا ٧١}^\circ \text{ ٣٤َ}}$

∴ ب حـ = $\frac{\text{١٢ جا ٣٦}^\circ \text{ ٥٢َ}}{\text{جا ٧١}^\circ \text{ ٣٤َ}}$ ≈ ٧.٦ سم

٢٠

∵ $\frac{\text{٧}}{\text{جا ٦٠}^\circ} = \frac{\text{٨}}{\text{جا ب}}$ ∴ ق(∠ب) ≈ ٨١° ٤٧َ ١٢ً

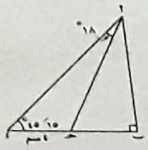
(ويرفض الحل الآخر لأن المثلث حاد الزوايا)

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٨١° ٤٧َ ١٢ً) = ٣٨° ١٢َ ٤٨ً

∴ $\frac{\text{٧}}{\text{جا ٦٠}^\circ} = \frac{\text{محيط } \Delta \text{ أ ب حـ}}{\text{جا ٦٠}^\circ \text{ + جا ٨١}^\circ \text{ ٤٧َ ١٢ً + جا ٣٨}^\circ \text{ ١٢َ ٤٨ً}}$

∴ محيط ∆ أ ب حـ ≈ ٢٠ سم

٢١



فى المثلث أ حـ ء :

∵ ق(∠أ حـ ء)

= ١٨٠° − (١٨° + ٤٥° ١٥َ)

= ١١٦° ٤٥َ

∴ $\frac{\text{أ ء}}{\text{جا ١١٦}^\circ \text{ ٤٥َ}} = \frac{\text{٤}}{\text{جا ١٨}^\circ}$

∴ أ ء = $\frac{\text{٤ جا ١١٦}^\circ \text{ ٤٥َ}}{\text{جا ١٨}^\circ}$ ≈ ١١.٦ سم

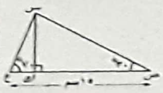
∴ فى المثلث أ ب ء : $\frac{\text{أ ب}}{\text{جا ٤٥}^\circ \text{ ١٥َ}} = \frac{\text{١١.٦}}{\text{جا ٩٠}^\circ}$

∴ أ ب = $\frac{\text{١١.٦ جا ٤٥}^\circ \text{ ١٥َ}}{\text{جا ٩٠}^\circ}$ ≈ ٨ سم

٢٢

فى المثلث س ص ع : نرسم $\overline{\text{س ل}} \perp \overline{\text{ص ع}}$

∵ ق(∠س) = ١٨٠° − (٣٠° + ٧٠°) = ٨٠°



∴ $\frac{\text{س ص}}{\text{جا ٧٠}^\circ} = \frac{\text{١٥}}{\text{جا ٨٠}^\circ}$

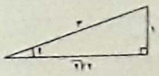
∴ س ص = $\frac{\text{١٥ جا ٧٠}^\circ}{\text{جا ٨٠}^\circ}$

= ١٤.٣١ سم

∴ فى المثلث س ص ل : $\frac{\text{س ل}}{\text{جا ٣٠}^\circ} = \frac{\text{١٤.٣}}{\text{جا ٩٠}^\circ}$

∴ س ل = $\frac{\text{١٤.٣١ جا ٣٠}^\circ}{\text{جا ٩٠}^\circ}$ ≈ ٧.١٦ سم

٢٣



∵ ظا أ = ١ / ٢√٢

∴ جا أ = ١/٣

∴ ٨ / (١/٣) = ٢٠ / جا حـ

∴ جا حـ = ٠.٨٣

∴ ق (∠ حـ) = ٥٦° ٢٧َ ٤٧ ، ١٢٣° ٣٢َ ٣٢

، ∵ ∠ حـ منفرجة ∴ ق (∠ حـ) = ١٢٣° ٣٢َ ٣٢

٢٤

∵ ظا حـ = ٤/٣

∴ ق (∠ حـ) = ٥٣° ٧َ ٤٨

∴ ق (∠ أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٥٣° ٧َ ٤٨) = ٩٦° ٥٢َ ١٢

∴ أ / جا ٩٦° ٥٢َ ١٢ = ٥ / جا ٣٠° = حـ / جا ٥٣° ٧َ ٤٨

∴ أ = ٥ جا ٩٦° ٥٢َ ١٢ / جا ٣٠° = ١٠ سم

، حـ = ٥ جا ٥٣° ٧َ ٤٨ / جا ٣٠° = ٨ سم

، مساحة Δ أ ب حـ = ½ أ حـ جا ب

= ½ × ١٠ × ٨ × جا ٣٠°

= ٢٠ سم²

٢٥

(١) (د) (٢) (د) (٣) (ب) (٤) (أ)

(٥) (د) (٦) (أ) (٧) (جـ) (٨) (جـ)

(٩) (د) (١٠) (ب)

٢٦

∵ (س + ص + ع) / (جا س + جا ص + جا ع) = ٢ نق

∴ نق = ٥٦.٨٨ / (٢ × ٢.٣٧) = ١٢ سم

٢٧

∵ أ / جا ٦٠° = ب / جا ٤٥° = (أ + ب) / (جا ٦٠° + جا ٤٥°)

∴ أ / جا ٦٠° = ب / جا ٤٥° = (√٦ + ٢) / (جا ٦٠° + جا ٤٥°)

∴ أ = √٦ سم ، ب = ٢ سم

٢٨

∵ جا أ : جا ب : جا حـ = ٢ : ٤ : ٥

∴ أ : ب : حـ = ٢ : ٤ : ٥

∴ أ = ٢ ك ، ب = ٤ ك ، حـ = ٥ ك

، ∵ حـ − ب = ٥ ك − ٤ ك = ك = ٢

∴ أ = ٦ سم ، ب = ١٢ سم

٢٩

∵ ق (∠ أ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ٢ : ٤ : ٣

∴ ق (∠ أ) = ٢ ك ، ق (∠ ب) = ٤ ك ، ق (∠ حـ) = ٣ ك

∵ ق (∠ أ) + ق (∠ ب) + ق (∠ حـ) = ١٨٠°

∴ ٢ ك + ٤ ك + ٣ ك = ١٨٠° ∴ ك = ١٨°

∴ ٥ / جا ٥٤° = ب / جا ٧٢° = حـ / جا ٥٤°

= محيط Δ أ ب حـ / (جا ٥٤° + جا ٧٢° + جا ٥٤°)

∴ محيط Δ أ ب حـ = ١٥.٩ سم

٣٠

∵ ق (∠ أ) + ق (∠ ب) + ق (∠ حـ) = ١٨٠°

∴ ك + ٣ ك + ٥ ك = ١٨٠° ∴ ك = ٢٠°

∴ أ / جا ٢٠° = ب / جا ٦٠° = حـ / جا ١٠٠°

= ١٦ / (جا ٢٠° + جا ٦٠° + جا ١٠٠°)

∵ ∠ أ أصغر الزوايا قياسًا.

∴ أ أصغر الأضلاع طولاً. ∴ أ = ٢.٥ سم

٣١

∵ ق (∠ أ) + ٣/٢ ق (∠ أ) + ٢ ق (∠ أ) = ١٨٠°

∴ ق (∠ أ) = ٤٠° ، ق (∠ ب) = ٦٠° ، ق (∠ حـ) = ٨٠°

، ∵ أ / جا ٤٠° = ب / جا ٦٠° = حـ / جا ٨٠° = ٢٠

∴ أ = ٢٠ جا ٤٠° ، ب = ٢٠ جا ٦٠°

∴ مساحة Δ أ ب حـ

= ½ × ٢٠ جا ٤٠° × ٢٠ جا ٦٠° × جا ٨٠° = ١١٠ سم²

٣٢

بالقسمة على ١٢ ∴ جا أ / ٢ = جا ب / ٣ = جا حـ / ٤

وبوضع أ = ٢ ك ، ب = ٣ ك ، حـ = ٤ ك

∴ ٢ ك + ٣ ك + ٤ ك = ٤٥ ∴ ك = ٥

∴ أ = ١٠ سم ، حـ = ٢٠ سم

٣٣

من خواص التناسب نجد أن

(أ + ب − حـ + أ + حـ − ب) / (٣ + ٥) = (أ + حـ − ب + ب + حـ − أ) / (٥ + ٧)

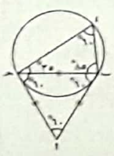
= (أ + ب − حـ + ب + حـ − أ) / (٣ + ٧)

∴ ٢ أ / ٨ = ٢ حـ / ١٢ = ٢ ب / ١٠ ∴ أ / ٤ = حـ / ٦ = ب / ٥

∴ أ : ب : حـ = ٤ : ٥ : ٦

∴ جا أ : جا ب : جا حـ = ٤ : ٥ : ٦

٣٤



∵ أب ، أحـ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، حـ

∴ أب = أحـ

، ∵ ق (∠ أ) = ٦٠°

∴ Δ أ ب حـ مثلث متساوي الأضلاع.

، ∵ مساحة المثلث = ½ أب × أحـ × جا (∠ أ)

∴ ٩√٣ = ½ × (أب)² × جا ٦٠°

∴ ٩√٣ = (√٣ / ٤) × (أب)²

∴ أب = ٦ سم ∴ ب حـ = ٦ سم

، ∵ ق (∠ ء) = ق (∠ ب حـ أ) = ٦٠°

(محيطية ومماسية مشتركان في ب⌢حـ)

∴ ق (∠ ب حـ ء) = ١٨٠° − (٨٥° + ٦٠°) = ٣٥°

∴ في Δ ب حـ ء : ب ء / جا ٣٥° = ء حـ / جا ٨٥° = ٦ / جا ٦٠°

∴ ب ء = ٦ جا ٣٥° / جا ٦٠° = ٤ سم

، ء حـ = ٦ جا ٨٥° / جا ٦٠° = ٧ سم

∴ محيط المثلث ء ب حـ = ٦ + ٤ + ٧ = ١٧ سم

٣٥

في Δ أ ب حـ

ق (∠ حـ) = ½ ق (∠ أ م ب) = ٤٠°

، ق (∠ أ ب حـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٨٥°) = ٥٥°

∴ ٥ / جا ٤٠° = ب / جا ٥٥° = أ / جا ٨٥° = ٢ نق

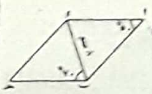
= محيط Δ أ ب حـ / (جا ٤٠° + جا ٥٥° + جا ٨٥°)

∴ محيط Δ أ ب حـ = ١٩.١٢ سم ، نق = ٣.٨٩ سم

∴ مساحة الدائرة = π نق² = π (٣.٨٩)²

= ٤٧.٥ سم²

٣٦



∵ أ ب حـ ء متوازي أضلاع

∴ ق (∠ حـ) = ٥٠°

في Δ ب ء حـ

ق (∠ ب ء حـ) = ١٨٠° − (٥٠° + ٧٠°) = ٦٠°

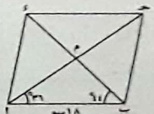
∴ ٨ / جا ٥٠° = ب حـ / جا ٦٠° = ء حـ / جا ٧٠°

∴ ب حـ = ٩ سم ، ء حـ = ٩,٨ سم

∴ محيط متوازى الأضلاع = ٢ (ب حـ + حـ ء)

= ٢٨ سم

٣٧



فى Δ أ ب م : ق (∠ أ م ب)

= ١٨٠° - (٤٤° + ٣٦°)

= ١٠٠°

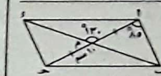
∴ $\frac{١٨}{\text{حا } ١٠٠°} = \frac{\text{أ م}}{\text{حا } ٤٤°}$ ∴ أ م = $\frac{١٨ \times \text{حا } ٤٤°}{\text{حا } ١٠٠°}$

∴ أ حـ = ٢ (أ م) = ٢٥,٣٩ سم

، مساحة ▱ أ ب حـ ء = ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ١٨ × ٢٥,٣٩ حا ٣٦°

= ٢٦٩ سم²

٣٨



فى Δ أ ب م :

ق (∠ م) = ٥٠°

، ق (∠ ب) = ١٨٠° - (٨٥° + ٥٠°) = ٤٥°

∴ $\frac{١٠}{\text{حا } ٤٥°} = \frac{\text{ب م}}{\text{حا } ٨٥°}$

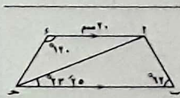
∴ ب م = $\frac{١٠ \text{ حا } ٨٥°}{\text{حا } ٤٥°}$ = ١٤,١ سم

∴ ب ء = ٢ ب م = ٢٨,٢ سم

، مساحة متوازى الأضلاع أ ب حـ ء

= ٤ × $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٤,١ حا ٥٠° = ٢١٦ سم²

٣٩



∵ $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ ق (∠ أ ء حـ)

+ ق (∠ ء حـ ب) = ١٨٠°

∴ ق (∠ ء حـ ب) = ١٨٠° - ١٢٠° = ٦٠°

∴ ق (∠ ء حـ أ) = ٦٠° - ٢٣ ٢٥° = ٣٦ ٣٥°

∴ فى المثلث أ ء حـ : $\frac{٢٠}{\text{حا } ٣٦ ٣٥°} = \frac{\text{أ حـ}}{\text{حا } ١٢٠°}$

∴ أ حـ = $\frac{٢٠ \text{ حا } ١٢٠°}{\text{حا } ٣٦ ٣٥°}$ = ٢٩ سم

، فى المثلث أ ب حـ :

∵ ق (∠ أ) = ١٨٠° - (٦٢° + ٢٣ ٢٥°) = ٣٥ ٩٤°

∴ $\frac{٢٩}{\text{حا } ٦٢°} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{حا } ٣٥ ٩٤°}$

∴ ب حـ = $\frac{٢٩ \text{ حا } ٣٥ ٩٤°}{\text{حا } ٦٢°}$ = ٣٣ سم

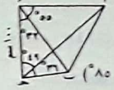
∴ مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ أ حـ × ب حـ × حا ٢٥ ٢٣°

+ $\frac{١}{٢}$ أ حـ × أ ء × حا ٢٥ ٢٣°

= $\frac{١}{٢}$ × ٢٩ (٣٣ + ٢٠) حا ٢٥ ٢٣°

= ٢٠٥ سم²

٤٠



فى Δ ب ء حـ

ق (∠ ء ب حـ) = ١٨٠° - (٣٢° + ٨٥°)

= ٦٣°

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{حا } ٨٥°} = \frac{١٠٠}{\text{حا } ٦٣°}$

∴ ب ء = $\frac{١٠٠ \text{ حا } ٨٥°}{\text{حا } ٦٣°}$ = ١١٢ سم

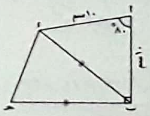
، فى Δ أ ء حـ :

ق (∠ ء أ حـ) = ١٨٠° - (٤٩° + ٨٧°) = ٤٤°

∴ $\frac{\text{أ حـ}}{\text{حا } ٨٧°} = \frac{١٠٠}{\text{حا } ٤٤°}$

∴ أ حـ = $\frac{١٠٠ \text{ حا } ٨٧°}{\text{حا } ٤٤°}$ = ١٤٤ سم

٤١



فى المثلث أ ب ء :

∵ أ ب = أ ء

∴ ق (∠ أ ب ء)

= ق (∠ أ ء ب) = $\frac{١٨٠° - ٨٠°}{٢}$ = ٥٠°

∴ $\frac{١٠}{\text{حا } ٥٠°} = \frac{\text{ب ء}}{\text{حا } ٨٠°}$

∴ ب ء = $\frac{١٠ \text{ حا } ٨٠°}{\text{حا } ٥٠°}$ = ١٢,٨٦ سم

، ∵ ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠°

∴ ق (∠ ء ب حـ) = ٩٠° - ٥٠° = ٤٠°

∴ مساحة Δ أ ب ء = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٠ × حا ٨٠° = ٤٩ سم²

، مساحة Δ ء ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٢,٨٦ × ١٢,٨٦ × حا ٤٠°

= ٥٣ سم²

∴ مساحة الشكل أ ب حـ ء = ٤٩ + ٥٣ = ١٠٢ سم²

٤٢

① ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{حا حـ}}$

بضرب النسبة الأولى × ٣ والثانية × ٤ وبالطرح :

∴ $\frac{\text{٣ أ - ٤ ب}}{\text{٣ حا أ - ٤ حا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{حا حـ}}$

② ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{حا ب}}$ ∴ ب = $\frac{\text{أ حا ب}}{\text{حا أ}}$

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ أ ب حا حـ = $\frac{\text{أ}^2 \text{ حا ب حا حـ}}{\text{٢ حا أ}}$

③ ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{حا حـ}}$ = ٢ نق

∴ حا حـ = $\frac{\text{حـ}}{\text{٢ نق}}$

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ أ ب × $\frac{\text{حـ}}{\text{٢ نق}} = \frac{\text{أ ب حـ}}{\text{٤ نق}}$

٤٣

① (د) ② (حـ) ③ (حـ) ④ (ب)

⑤ (د) ⑥ (حـ) ⑦ (د) ⑧ (ب)

⑨ (حـ) ⑩ (ب) ⑪ (حـ)

إرشادات لحل رقم ٤٣

① ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{حا حـ}}$ = ٢ نق = ٦

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{حا أ}} \times \frac{\text{ب}}{\text{حا ب}} \times \frac{\text{حـ}}{\text{حا حـ}}$ = ٦ × ٦ × ٦

∴ $\frac{\text{أ ب حـ}}{\text{حا أ حا ب حا حـ}}$ = ٢١٦

② ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{حا حـ}}$ = ٢ نق

∴ أ قتا أ = ب قتا ب = حـ قتا حـ = ٢ نق

∴ أ قتا أ + ب قتا ب + حـ قتا حـ = ٦ نق

③ ∵ $\frac{\text{أ + ب + حـ}}{\text{حا أ + حا ب + حا حـ}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{\text{حا ب + حا حـ + حا أ}}{\text{حا أ + حا ب + حا حـ}}$ = ٢ نق

∴ ٢ نق = ١ ∴ نق = $\frac{١}{٢}$

∴ محيط الدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ

= ٢ π نق = ٢ π × $\frac{١}{٢}$ = π

④ ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{حا حـ}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{\text{حا أ}}{\text{أ}} = \frac{\text{حا ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{حا حـ}}{\text{حـ}} = \frac{١}{\text{٢ نق}}$

وبضرب مقدمات وتوالى النسبة الأولى × أ²

، النسبة الثانية × ب² ، النسبة الثالثة × حـ²

وجمع المقدمات والتوالى

∴ $\frac{\text{أ حا أ + ب}^2\text{ حا ب + حـ}^2\text{ حا حـ}}{\text{أ}^3\text{ + ب}^3\text{ + حـ}^3} = \frac{١}{\text{٢ نق}}$

⑤ ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{حا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{حا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{حا حـ}}$ = ١٠

∴ أ = ١٠ حا أ ، ب = ١٠ حا ب

، ∵ مساحة Δ أ ب حـ = ٢٤

∴ $\frac{١}{٢}$ أ ب حا حـ = ٢٤

∴ $\frac{١}{٢}$ × ١٠ حا أ × ١٠ حا ب × حا حـ = ٢٤

∴ حا أ حا ب حا حـ = $\frac{٢٤}{٥٠} = \frac{١٢}{٢٥}$

∴ جا ا جا ب جا (١٨٠ - (ا + ب)) = $\frac{١٢}{٢٥}$

∴ جا ا جا ب جا (ا + ب) = $\frac{١٢}{٢٥}$

⑥ ∵ ب حـ = $\sqrt{(٦)^{٢} + (٨)^{٢}}$ = ١٠ سم

∴ ب ء = ٤ سم

فى Δ ا ب ء : $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا } \theta}$ = $\frac{\text{ا ء}}{\text{جا ب}}$

∴ $\frac{٤}{\text{جا } \theta}$ = $\frac{\text{ا ء}}{٠.٦}$ ∴ ا ء جا θ = ٢.٤ (١)

فى Δ ا حـ ء : $\frac{\text{ء حـ}}{\text{جا } (٩٠ - \theta)}$ = $\frac{\text{ا ء}}{\text{جا حـ}}$

∴ $\frac{٦}{\text{جتا } \theta}$ = $\frac{\text{ا ء}}{٠.٨}$ ∴ ا ء جتا θ = ٤.٨ (٢)

بقسمة (٢) على (١) : ∴ $\frac{\text{جتا } \theta}{\text{جا } \theta}$ = $\frac{٤.٨}{٢.٤}$

∴ ظتا θ = ٢

⑦ ∵ حـ ء = ٢ ء ب

∴ مساحة Δ ا حـ ء = ٢ مساحة Δ ا ب ء

$\frac{١}{٢}$ × ا ء × ا حـ × جا ٦٠°

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ا ب × ا ء جا ٤٥°

∴ $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا حـ}}$ = $\frac{(\frac{\sqrt{٣}}{٢})}{(٢ \times \frac{١}{\sqrt{٢}})}$ = $\frac{\sqrt{٦}}{٤}$

، ∵ $\frac{\text{ا ب}}{\text{ا حـ}}$ = $\frac{\text{جا حـ}}{\text{جا ب}}$ ∴ $\frac{\text{جا ب}}{\text{جا حـ}}$ = $\frac{٤}{\sqrt{٦}}$ = $\frac{٢\sqrt{٦}}{٣}$

⑧ فى Δ ا ب ء : ∵ $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا ا}}$ = $\frac{\text{ا ء}}{\text{جا } ٤٥°}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا ا}}$ = $\frac{٤\sqrt{٢}}{(\frac{١}{\sqrt{٢}})}$ = ٨

فى Δ ب ء حـ : ∵ $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا حـ}}$ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{جا } ٣٠°}$

∴ $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ ب حـ ، ∵ جا ا = جا حـ

∴ ٢ ب حـ = ٨ ∴ ب حـ = ٤ سم

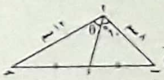
⑨ فى Δ حـ ء هـ : ∵ ظا (د ء هـ حـ) = $\frac{٣}{٤}$

∴ جا حـ = $\frac{٤}{٥}$

، فى Δ ا ب حـ : ∵ $\frac{\text{ا ب}}{\text{جا حـ}}$ = ٢ نق

∴ ٢ نق = $\frac{٦}{(\frac{٤}{٥})}$ ∴ نق = ٣.٧٥ سم

⑩ فى Δ ا ب ء :



$\frac{\text{ب ء}}{\text{جا } ٦٠°}$ = $\frac{٨}{\text{جا (د ا ء ب)}}$

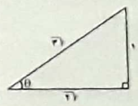
∴ ب ء × جا (د ا ء ب)

= ٨ جا ٦٠° = ٤ $\sqrt{٣}$ (١)

فى Δ ا ء حـ : $\frac{\text{حـ ء}}{\text{جا } \theta}$ = $\frac{١٢}{\text{جا (د ا ء حـ)}}$

∴ حـ ء × جا (د ا ء حـ) = ١٢ جا θ (٢)

من (١) ، (٢) :



، ∵ ب ء = حـ ء

، جا (د ا ء ب)

= جا (د ا ء حـ)

∴ ١٢ جا θ = ٤ $\sqrt{٣}$ ∴ جا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ ظا θ = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ ظا (د ء ا حـ) = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

⑪ فى Δ ا ب حـ :

∵ $\frac{\text{ا ب}}{\text{جا } ٧٠°}$ = $\frac{٦}{\text{جا } ٤٠°}$ = ٢ نق

∴ ا ب = ٨.٧٧ سم ، نق = ٤.٦٦٧ سم

∴ مساحة الجزء المظلل

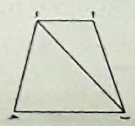
= مساحة الدائرة - مساحة المثلث ا ب حـ

= π نق^{٢} - $\frac{١}{٢}$ أ حـَ جا ب

= π × (٤.٦٧)^{٢} - $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨.٧٧ × جا ٧٠°

= ٤٣.٧ سم^{٢}

٤٤



فى المثلث ا ب ء :

$\frac{\text{ا ء}}{\text{جا (د ا ب ء)}}$ = $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا ا}}$

، من Δ ء ب حـ

$\frac{\text{ب حـ}}{\text{جا (د ب ء حـ)}}$ = $\frac{\text{ب ء}}{\text{جا حـ}}$

، ∵ د ا ، د حـ متكاملتان «لأن ا ب حـ ء رباعى دائرى»

∴ جا ا = جا حـ ∴ $\frac{\text{ا ء}}{\text{جا (د ا ب ء)}}$ = $\frac{\text{ب حـ}}{\text{جا (د ب ء حـ)}}$

∴ ا ء × جا (د ب ء حـ) = ب حـ × جا (د ا ب ء)

٤٥

① ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ا}}$ = $\frac{\text{ب}}{\text{جا ب}}$ = $\frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$

∴ $\frac{\text{أ + ب + حـ}}{\text{جا ا + جا ب + جا حـ}}$ = $\frac{\text{أ}}{\text{جا ا}}$

∴ جا ا ، جا ب ، جا حـ = $\frac{\text{٢ ع جا ا}}{\text{أ}}$

= $\frac{\text{٢ ع جا ا × ب حـ}}{\text{أ ب حـ}}$

، ∵ Δ = $\frac{١}{٢}$ ب حـ جا ا

∴ ب حـ جا ا = ٢ Δ

∴ جا ا ، جا ب ، جا حـ = $\frac{\text{٢ ع × ٢ } \Delta}{\text{أ ب حـ}}$ = $\frac{\text{٤ ع } \Delta}{\text{أ ب حـ}}$

② ∵ $\frac{١}{\text{حـ جا ا}}$ = $\frac{\frac{١}{٢}\text{ ب}}{\frac{١}{٢}\text{ ب حـ جا ا}}$

، $\frac{١}{\text{أ جا ب}}$ = $\frac{\frac{١}{٢}\text{ حـ}}{\frac{١}{٢}\text{ أ حـ جا ب}}$

، $\frac{١}{\text{ب جا حـ}}$ = $\frac{\frac{١}{٢}\text{ أ}}{\frac{١}{٢}\text{ ب أ جا حـ}}$

وبالجمع ∴ $\frac{١}{\text{حـ جا ا}}$ + $\frac{١}{\text{أ جا ب}}$ + $\frac{١}{\text{ب جا حـ}}$

= $\frac{\frac{١}{٢}\text{ ب}}{\frac{١}{٢}\text{ ب حـ جا ا}}$ + $\frac{\frac{١}{٢}\text{ حـ}}{\frac{١}{٢}\text{ أ حـ جا ب}}$ + $\frac{\frac{١}{٢}\text{ أ}}{\frac{١}{٢}\text{ ب أ جا حـ}}$

= $\frac{\frac{١}{٢}\text{ (ب + حـ + أ)}}{\Delta}$ = $\frac{\text{ع}}{\Delta}$

٤٦

∵ مساحة الدائرة = π نق^{٢} ، نق = $\frac{\text{أ}}{\text{٢ جا ا}}$ = $\frac{\text{ب}}{\text{٢ جا ب}}$

وبالتعويض

∴ مساحة الدائرة = $\frac{\text{π أ ب}}{\text{٤ جا ا جا ب}}$

إجابات تمارين 20

١

① (حـ) ② (أ) ③ (ب) ④ (د)

٢

∵ ع^{٢} = (١٣)^{٢} + (١٦)^{٢} - ٢ × ١٣ × ١٦ × جتا ٩٥° = ٤٦١.٢٦

∴ ع = ٢١.٥ سم

٣

∵ ب^{٢} = (٣)^{٢} + (٥)^{٢} - ٢ × ٣ × ٥ × جتا ٤١° ٣٦َ = ٩.٨

∴ ب = ٣ سم

٤

∵ جتا حـ = $\frac{(٣)^{٢} + (٥)^{٢} - (٧)^{٢}}{٢ (٣) (٥)}$ = - $\frac{١}{٢}$

∴ ق (د حـ) = ١٢٠°

٥

∵ جتا ا = $\frac{(٥.٨)^{٢} + (٣.٤)^{٢} - (٧.٦)^{٢}}{٢ (٥.٨) (٣.٤)}$

∴ ق (د ا) = ١٠٨° ٤٢َ

، جتا ب = $\frac{(٧.٦)^{٢} + (٣.٤)^{٢} - (٥.٨)^{٢}}{٢ (٧.٦) (٣.٤)}$

∴ ق (د ب) = ٤٦° ٢٠َ

∴ ق (د حـ) = ١٨٠° - (١٠٨° ٤٢َ + ٤٦° ٢٠َ) = ٢٥° ٢٠َ

Scanned by CamScanner

٦

∵ جتا ب = $\frac{(١٣)^٢ + (١٥)^٢ - (١٤)^٢}{٢ (١٣)(١٥)}$

∴ ق(∠ب) = ٥٩° ٢٩َ

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٣ × ١٥ × جا ٥٩° ٢٩َ

= ٨٤ سم²

٧

∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع

∴ جتا س = $\frac{(٢٧)^٢ + (٢٤)^٢ - (١٨)^٢}{٢ \times ٢٧ \times ٢٤}$

∴ ق(∠س) = ٤٠° ٤٨َ

، ∵ نق = $\frac{١٨}{٢ \text{ جا } ٤٠° ٤٨َ}$

∴ مساحة الدائرة = π $\left(\frac{١٨}{٢ \text{ جا } ٤٠° ٤٨َ}\right)^٢$ = ٥٩٦ سم²

٨

① حـ² = (٧)² + (٩)² − ٢ (٧) (٩) جتا ٩٦° ٢٣َ = ١٤٤

∴ حـ = ١٢ سم

② مساحة Δ أ ب حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٧ × ٩ × جا ٩٦° ٢٣َ = ٣١ سم²

③ نق = $\frac{حـ}{٢ \text{ جا حـ}}$ = $\frac{١٢}{٢ \text{ جا } (٩٦° ٢٣َ)}$ = ٦ سم

٩

حـ = ٥٢ − (١٣ + ١٧) = ٢٢ سم

∵ أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع

∴ جتا حـ = $\frac{(١٣)^٢ + (١٧)^٢ - (٢٢)^٢}{٢ (١٣)(١٧)}$

∴ ق(∠حـ) = ٩٣° ٢٢َ

، مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٣ × ١٧ × جا ٩٣° ٢٢َ

= ١١٠ سم²

١٠

∵ أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع.

∴ جتا س = $\frac{(١٨)^٢ + (١٠)^٢ - (٢٤٫٥)^٢}{٢ \times ١٨ \times ١٠}$

∴ ق(∠س) = ١١٩° ١٩َ

، ∵ نق = $\frac{٢٤٫٥}{٢ \text{ جا } ١١٩° ١٩َ}$ = ١٤ سم

∴ محيط الدائرة المارة برؤوس المثلث س ص ع

= ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ = ٨٨ سم

١١

∵ أ² = (٢٫٥)² + (٢)² − ٢ × ٢٫٥ × ٢ × $\frac{٢}{٥}$

= ٦٫٢٥

∴ أ = ٢٫٥ سم ∴ أ = ب

∴ Δ أ ب حـ متساوي الساقين.

١٢

بفرض أن سَ = ٤ ك ، صَ = ٥ ك ، عَ = ٦ ك

، ∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع.

∴ جتا س = $\frac{٢٥ ك^٢ + ٣٦ ك^٢ - ١٦ ك^٢}{٢ \times ٥ ك \times ٦ ك}$ = $\frac{٣}{٤}$

∴ ق(∠س) = ٤١° ٢٥َ

١٣

∵ سَ : صَ : عَ = جا س : جا ص : جا ع = ٧ : ٨ : ١٢

وبفرض أن : سَ = ٧ ك ، صَ = ٨ ك ، عَ = ١٢ ك

، ∵ أكبر زاوية تقابل أكبر ضلع.

∴ جتا ع = $\frac{(٧ ك)^٢ + (٨ ك)^٢ - (١٢ ك)^٢}{٢ \times ٧ ك \times ٨ ك}$ = $\frac{-٣١}{١١٢}$

∴ ق(∠ع) = ١٠٦° ٤َ

١٤

∵ حـ² = (٤)² + (٥)² − ٢ × ٤ × ٥ × $-\frac{١}{٢}$ = ٦١

∴ حـ = ٧٫٨ سم

، ∵ جتا حـ = $-\frac{١}{٢}$ ∴ ق(∠حـ) = ١٢٠°

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٥ × جا ١٢٠° = ٥ $\sqrt{٣}$ سم²

١٥

∵ ظا ب = $\frac{٣}{٤}$ ∴ جا ب = $\frac{٣}{٥}$ ، جتا ب = $\frac{٤}{٥}$

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ١٨ × $\frac{٣}{٥}$

= ٨٦٫٤ سم²

، ب² = (١٦)² + (١٨)² − ٢ × ١٦ × ١٨ × $\frac{٤}{٥}$ = ١١٩٫٢

∴ ب = ١١ سم

∴ محيط Δ أ ب حـ = ١٦ + ١٨ + ١١ = ٤٥ سم

١٦

بالقسمة على ١٢ ∴ $\frac{\text{جا أ}}{٦}$ = $\frac{\text{جا ب}}{٤}$ = $\frac{\text{جا حـ}}{٣}$

∴ أ : ب : حـ = ٦ : ٤ : ٣

، بفرض أن : أ = ٦ ك ، ب = ٤ ك ، حـ = ٣ ك

، ∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع

∴ جتا حـ = $\frac{(٦ ك)^٢ + (٤ ك)^٢ - (٣ ك)^٢}{٢ \times ٦ ك \times ٤ ك}$ = $\frac{٤٣}{٤٨}$

∴ ق(∠حـ) = ٢٦° ٢٣َ

١٧

∵ أ : ب : حـ = ٣ : ٤ : ٥

، وبفرض أن : أ = ٣ ك ، ب = ٤ ك ، حـ = ٥ ك

∴ جتا حـ = $\frac{(٣ ك)^٢ + (٤ ك)^٢ - (٥ ك)^٢}{٢ \times ٣ ك \times ٤ ك}$ = ٠

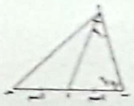
∴ ق(∠حـ) = ٩٠°

∵ ٣ ك + ٤ ك + ٥ ك = ٢٤ ∴ ك = ٢

∴ أ = ٦ سم ، ب = ٨ سم ، حـ = ١٠ سم

، مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ سم²

١٨



في المثلث أ ب حـ

∵ $\frac{٨}{\text{جا } ٦٠°}$ = $\frac{\text{أ حـ}}{\text{جا } ٧٥°}$

∴ أ حـ = $\frac{٨ \text{ جا } ٧٥°}{\text{جا } ٦٠°}$ = ٨٫٩٢ سم

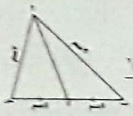
، ∵ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٧٥°) = ٤٥°

∴ (أ ء)² = (٨٫٩٢)² + (٤)² − ٢ × ٨٫٩٢ × ٤ جتا ٤٥°

= ٤٥

∴ أ ء = ٦٫٧ سم

١٩



في المثلث أ ب حـ

∵ جتا ب = $\frac{(٨)^٢ + (٩)^٢ - (٧)^٢}{٢ \times ٨ \times ٩}$

= $\frac{٢}{٣}$

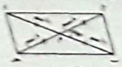
∴ ق(∠ب) = ٤٨° ١١َ

∴ في المثلث أ ب ء

(أ ء)² = (٩)² + (٤)² − ٢ × ٩ × ٤ جتا ٤٨° ١١َ = ٤٩

∴ أ ء = ٧ سم ، نق = $\frac{٧}{٢ \text{ جا } ٤٨° ١١َ}$ = ٤٫٧ سم

٢٠



∵ (أ ب)²

= (٨)² + (١٠)² − ٢ × ٨ × ١٠ جتا ٥٠°

∴ أ ب = ٨ سم

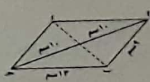
في المثلث أ م ء

∵ ق(∠أ م ء) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠°

∴ (أ ء)² = (٨)² + (١٠)² − ٢ × ٨ × ١٠ جتا ١٣٠°

∴ أ ء = ١٦ سم

٢١



في Δ ا ب حـ

∵ حتا ب $= \frac{(٩)^{٢} + (١٣)^{٢} - (٢٠)^{٢}}{٢\,(٩)\,(١٣)}$

∴ ق(∠ب) = ١٢٩° ٥٢َ

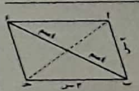
∴ ق(∠ب ا ء) = ١٨٠° − ١٢٩° ٥٢َ = ٥٠° ٨َ

في Δ ا ب ء :

(ب ء)^{٢} = (٩)^{٢} + (١٣)^{٢} − ٢ (٩) (١٣) × حتا ٥٠° ٨َ

∴ ب ء = ١٠ سم

٢٢



نفرض أن ا ب = ٢ س

، ب حـ = ٣ س

، نصف محيط متوازى الأضلاع = ١٠ سم

∴ ٢ س + ٣ س = ١٠   ∴ س = ٢ سم

∴ ا ب = ٤ سم ، ب حـ = ٦ سم

في Δ ا ب ء : ∵ حتا ا $= \frac{(٤)^{٢} + (٦)^{٢} - (٨)^{٢}}{٢\,(٤)\,(٦)}$

∴ ق(∠ا) = ١٠٤° ٢٩َ

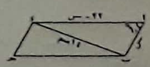
∴ ق(∠ا ب حـ) = ١٨٠° − ١٠٤° ٢٩َ = ٧٥° ٣١َ

∴ (ا حـ)^{٢} = (٤)^{٢} + (٦)^{٢} − ٢ (٤) (٦) حتا ٧٥° ٣١َ

∴ ا حـ = ٦,٢ سم

٢٣

نصف محيط متوازى الأضلاع = ٢٢ سم



بفرض أن ا ب = س

∴ ا ء = ٢٢ − س

∴ في Δ ا ب ء :

∴ (ب ء)^{٢} = (س)^{٢} + (٢٢ − س)^{٢}

− ٢ س (٢٢ − س) حتا ٦٠°

∴ ١٩٦ = ٣ س^{٢} − ٦٦ س + ٤٨٤

∴ ٣ س^{٢} − ٦٦ س + ٢٨٨ = ٠

∴ س^{٢} − ٢٢ س + ٩٦ = ٠

∴ (س − ٦) (س − ١٦) = ٠   ∴ س = ٦

∴ ا ب = ٦ سم ، ا ء = ١٦ سم

∴ $\frac{٦}{\text{جا}(\angle \text{ا ء ب})} = \frac{١٤}{\text{جا } ٦٠^{\circ}}$

∴ جا(∠ا ء ب) $= \frac{٦ \text{ جا } ٦٠^{\circ}}{١٤}$

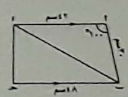
∴ ق(∠ا ء ب) = ٢١° ٤٧َ

، مساحة متوازى الأضلاع ا ب حـ ء

= ٢ مساحة المثلث ا ب ء

= ٢ × $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ١٦ جا ٦٠° = ٨٣ سم^{٢}

٢٤



في Δ ا ب ء :

(ب ء)^{٢} = (٣٠)^{٢} + (٤٢)^{٢}

− ٢ × ٣٠ × ٤٢ حتا ١٠٠°

∴ ب ء = ٥٥,٧ سم

، حتا(∠ا ء ب) $= \frac{(٥٥,٧)^{٢} + (٤٢)^{٢} - (٣٠)^{٢}}{٢ \times ٥٥,٧ \times ٤٢}$

= ٠,٨٤٨

، ∵ $\overline{\text{ا ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ ق(∠ء ب حـ) = ق(∠ا ء ب) (بالتبادل)

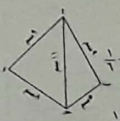
∴ حتا(∠ء ب حـ) = ٠,٨٤٨

∴ (حـ ء)^{٢} = (٥٥,٧)^{٢} + (٤٨)^{٢} − ٢

× ٥٥,٧ × ٤٨ × ٠,٨٤٨

∴ حـ ء = ٣٠ سم

٢٥



في Δ ا ب حـ :

حتا ب $= \frac{(٩)^{٢} + (٥)^{٢} - (١١)^{٢}}{٢ \times ٩ \times ٥} = -\frac{١}{٦}$

، في Δ ا ء حـ

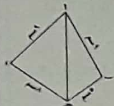
حتا ء $= \frac{(٩)^{٢} + (٨)^{٢} - (١١)^{٢}}{٢ \times ٩ \times ٨} = \frac{١}{٦}$

∴ حتا ب + حتا ء = ٠

∴ ق(∠ب) + ق(∠ء) = ١٨٠°

∴ الشكل رباعي دائري.

٢٦



∵ ا ب حـ ء

شكل رباعي دائري

∴ حتا ب = − حتا ء

∴ $\frac{(٩)^{٢} + (٥)^{٢} - (\text{ا حـ})^{٢}}{٥ \times ٩ \times ٢} = \frac{-(٩)^{٢} - (٨)^{٢} + (\text{ا حـ})^{٢}}{٨ \times ٩ \times ٢}$

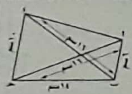
∴ $\frac{١٠٦ - (\text{ا حـ})^{٢}}{٥} = \frac{-١٤٥ + (\text{ا حـ})^{٢}}{٨}$

∴ ٨٤٨ − ٨ (ا حـ)^{٢} = −٧٢٥ + ٥ (ا حـ)^{٢}

∴ ١٣ (ا حـ)^{٢} = ١٥٧٣   ∴ (ا حـ)^{٢} = ١٢١

∴ ا حـ = ١١ سم

٢٧



في المثلث ا ب حـ :

حتا (∠ب ا حـ)

$= \frac{(٦)^{٢} + (١٦)^{٢} - (١٤)^{٢}}{٢ \times ٦ \times ١٦} = \frac{١}{٢}$

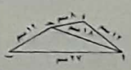
، في المثلث ب حـ ء

حتا (∠ب ء حـ) $= \frac{(١٠)^{٢} + (١٦)^{٢} - (١٤)^{٢}}{٢ \times ١٠ \times ١٦} = \frac{١}{٢}$

∴ ق(∠ب ا حـ) = ق(∠ب ء حـ)

∴ الشكل رباعي دائري.

٢٨



في Δ ا ء حـ

حتا (∠ء ا حـ)

$= \frac{(١٢)^{٢} + (١٨)^{٢} - (٨)^{٢}}{٢ \times ١٢ \times ١٨} = \frac{١٠١}{١٠٨}$

∴ ق(∠ء ا حـ) = ٢٠° ٤٥َ

، في Δ حـ ا ب

حتا (∠حـ ا ب) $= \frac{(٢٧)^{٢} + (١٨)^{٢} - (١٢)^{٢}}{٢\,(٢٧)\,(١٨)} = \frac{١٠١}{١٠٨}$

∴ ق(∠ء ا حـ) = ق(∠حـ ا ب)

أي أن $\overrightarrow{\text{ا حـ}}$ ينصف ∠ب ا ء

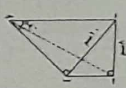
∴ مساحة الشكل ا ب حـ ء

= مساحة Δ ا ء حـ + مساحة Δ ا حـ ب

= $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٨ × جا ٤٥ َ ٢٠° + $\frac{١}{٢}$ × ١٨ × ٢٧ × جا ٤٥ َ ٢٠°

= ١٢٤ سم^{٢}

٢٩



في Δ ا ء ب

ا ب = $\sqrt{(١٠)^{٢} - (٨)^{٢}}$

= ٦ سم

، حتا ب = $\frac{٣}{٥}$ ∴ ق(∠ب) = ٥٣° ٨َ

في Δ ء ب حـ ء ب = $\frac{١}{٢}$ ء حـ

∴ ء حـ = ٢٠ سم ، ب حـ = ١٠ $\sqrt{٣}$ سم

في Δ ا ب حـ

ق(∠ا ب حـ) = ٩٠° + ٥٣° ٨َ = ١٤٣° ٨َ

∴ (ا حـ)^{٢} = (٦)^{٢} + (١٠ $\sqrt{٣}$)^{٢}

− ٢ (٦) (١٠ $\sqrt{٣}$) حتا ١٤٣° ٨َ

∴ ا حـ = ٢٢ سم

٣٠

∵ حـ² = (٣ ب)² + ب² − ٢ × ٣ ب × ب جتا ٦٠°

= ٧ ب²

∴ حـ = √٧ ب

∴ جتا ب = $\frac{\text{٧ب}^2 + \text{٩ب}^2 - \text{ب}^2}{\text{٢} \times \sqrt{\text{٧}}\,\text{ب} \times \text{٣ب}} = \frac{\text{١٥}}{\text{٦}\sqrt{\text{٧}}} = \frac{\text{٥}}{\text{٢}\sqrt{\text{٧}}}$

∴ ق(∠ب) = ١٩° ٦َ

، ∵ ق(∠أ) + ق(∠ب) = ١٢٠°

∴ ق(∠أ) = ١٠٠° ٥٤َ

٣١

∵ ١٠√٣ = ½ × ٥ × حـ جا ١٢٠°

∴ حـ = ٨ سم

∴ ب² = (٥)² + (٨)² − ٢ × ٥ × ٨ جتا ١٢٠° = ١٢٩

∴ ب = √١٢٩ = ١١,٣٦ سم

∴ جتا أ = $\frac{\text{١٢٩} + (\text{٨})^2 - (\text{٥})^2}{\text{٢} \times \sqrt{\text{١٢٩}} \times \text{٨}}$

∴ ق(∠أ) = ٢٢° ٢٥َ

٣٢

∵ ب : حـ = ٣ : ٤

ويفرض أن: ب = ٣ ك ، حـ = ٤ ك

، ∵ مساحة Δ أ ب حـ = ٦٤

∴ ½ × ٣ ك × ٤ ك × جا ٣٠° = ٦٤

∴ ك = $\frac{\text{٨}}{\sqrt{\text{٣}}}$ ∴ ب = $\frac{\text{٢٤}}{\sqrt{\text{٣}}}$ سم ، حـ = $\frac{\text{٣٢}}{\sqrt{\text{٣}}}$

∴ أ² = $\left(\frac{\text{٣٢}}{\sqrt{\text{٣}}}\right)^2 + \left(\frac{\text{٢٤}}{\sqrt{\text{٣}}}\right)^2 - \text{٢} \times \frac{\text{٣٢}}{\sqrt{\text{٣}}} \times \frac{\text{٢٤}}{\sqrt{\text{٣}}}$ × جتا ٣٠°

∴ أ = ٩,٠٥ سم

∴ محيط Δ أ ب حـ = ٤١,٨ سم

٣٣

مساحة Δ أ ب حـ = ½ أ ب جا حـ

∴ ٢٠ = ½ × ٦ × ١٠ جا حـ

∴ جا حـ = ⅔

∴ ق(∠حـ) = ١٣٨° ١١َ (∠حـ منفرجة)

∴ حـ² = (٦)² + (١٠)² − ٢ × ٦ × ١٠ جتا ١٣٨° ١١َ

∴ حـ = ١٥ سم

٣٤

∵ $\frac{\text{جا أ}}{\text{١}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{١,٥}} = \frac{\text{جا حـ}}{\text{٢}}$

∴ أ : ب : حـ = ١ : ١,٥ : ٢

∴ أ = ك ، ب = ١,٥ ك ، حـ = ٢ ك

، ∵ حـ − أ = ٤ سم ∴ ٢ ك − ك = ٤

∴ ك = ٤

∴ أ = ٤ سم ، ب = ٦ سم ، حـ = ٨ سم

∴ جتا أ = $\frac{(\text{٦})^2 + (\text{٨})^2 - (\text{٤})^2}{\text{٢} \times \text{٦} \times \text{٨}} = \frac{\text{٧}}{\text{٨}}$

∴ ق(∠أ) = ٢٨° ٥٧َ ١٨ً

٣٥

∵ جا أ : جا ب : جا حـ = ٣ : ٥ : ٧

∴ أ : ب : حـ = ٣ : ٥ : ٧

ويفرض أن: أ = ٣ ك ، ب = ٥ ك ، حـ = ٧ ك

∴ جتا أ = $\frac{(\text{٥ك})^2 + (\text{٧ك})^2 - (\text{٣ك})^2}{\text{٢} \times \text{٥ك} \times \text{٧ك}} = \frac{\text{١٣}}{\text{١٤}}$

، جتا ب = $\frac{(\text{٣ك})^2 + (\text{٧ك})^2 - (\text{٥ك})^2}{\text{٢} \times \text{٣ك} \times \text{٧ك}} = \frac{\text{١١}}{\text{١٤}}$

، جتا حـ = $\frac{(\text{٣ك})^2 + (\text{٥ك})^2 - (\text{٧ك})^2}{\text{٢} \times \text{٣ك} \times \text{٥ك}} = -\frac{\text{١}}{\text{٢}}$

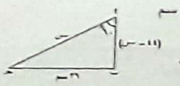
∴ جتا أ : جتا ب : جتا حـ = $\frac{\text{١٣}}{\text{١٤}} : \frac{\text{١١}}{\text{١٤}} : -\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ = ١٣ : ١١ : −٧

٣٦

(١) (ب) (٢) (جـ) (٣) (د)

(٤) (جـ) (٥) (ب) (٦) (أ)

٣٧



∵ محيط Δ أ ب حـ = ٧٠ سم

، أ = ٢٦ سم

∴ ب + حـ = ٧٠ − ٢٦

= ٤٤ سم

، بفرض ب = س

∴ حـ = ٤٤ − س

∴ (٢٦)² = س² + (٤٤ − س)²

− ٢ س (٤٤ − س) جتا ٦٠°

∴ س² − ٤٤ س + ٤٢٠ = ٠

∴ (س − ٣٠) (س − ١٤) = ٠

∴ س = ٣٠ أو س = ١٤

ب حـ = ٣٠ × ١٤ = ٤٢٠

∴ مساحة Δ أ ب حـ = ½ ب حـ جا أ

= ½ × ٤٢٠ × جا ٦٠°

= ١٠٥√٣ سم²

٣٨

∵ ٣٤ = ١٢ + (٦ + حـ) + حـ

∴ حـ = ٨ سم ، ب = ١٤ سم

، ∵ أصغر زاوية تقابل أصغر ضلع وهو حـ

، ∵ جتا حـ = $\frac{(\text{١٢})^2 + (\text{١٤})^2 - (\text{٨})^2}{\text{٢} \times \text{١٢} \times \text{١٤}} = \frac{\text{٢٣}}{\text{٢٨}}$

∴ ق(∠حـ) = ٣٤° ٤٦َ ١٩ً

، مساحة المثلث أ ب حـ = ½ × ١٢ × ١٤ جا ٣٤° ٤٦َ ١٩ً

= ٤٧,٩ سم²

٣٩

∵ س < ١٠

∴ أكبر الزوايا هي المقابلة للضلع الذي طوله ١٤ سم

∴ جتا ١٢٠° = $\frac{(\text{١٠})^2 + \text{س}^2 - (\text{١٤})^2}{\text{٢} \times \text{١٠} \times \text{س}}$

∴ −½ = $\frac{\text{س}^2 - \text{٩٦}}{\text{٢٠ س}}$

∴ − س² + ٩٦ = ١٠ س

∴ س² + ١٠ س − ٩٦ = ٠

(س + ١٦) (س − ٦) = ٠

∴ س = ٦ أو س = −١٦ (مرفوض)

٤٠

∵ جتا حـ = $\frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{حـ}^2}{\text{٢ أ ب}}$

∴ جتا ١٢٠° = $\frac{(\text{ب} - \text{٢})^2 + \text{ب}^2 - (\text{ب} + \text{٢})^2}{\text{٢} (\text{ب} - \text{٢}) (\text{ب})}$

∴ −½ = $\frac{\text{ب}^2 - \text{٤ب} + \text{٤} + \text{ب}^2 - \text{ب}^2 - \text{٤ب} - \text{٤}}{\text{٢} (\text{ب} - \text{٢}) (\text{ب})}$

∴ −١ = $\frac{\text{ب}^2 - \text{٨ب}}{\text{ب} (\text{ب} - \text{٢})}$ ∴ −١ = $\frac{\text{ب} - \text{٨}}{\text{ب} - \text{٢}}$

∴ ٢ − ب = ب − ٨ ∴ ٢ ب = ١٠

∴ ب = ٥ ∴ أ = ٣ ، حـ = ٧

٤١

∵ (أ + ب + حـ) (أ + ب − حـ) = ٣ أ ب

∴ (أ + ب)² − حـ² = ٣ أ ب

∴ أ² + ب² + ٢ أ ب − حـ² = ٣ أ ب

∴ أ² + ب² − حـ² = أ ب وبقسمة الطرفين على ٢ أ ب

∴ $\frac{\text{أ}^2 + \text{ب}^2 - \text{حـ}^2}{\text{٢ أ ب}} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}$

∴ جتا حـ = ½ ∴ ق(∠حـ) = ٦٠°

٤٢

∵ (أ + ب + حـ) (أ + ب − حـ) = ك أ ب

∴ (أ + ب)^2 − حـ^2 = ك أ ب

∴ أ^2 + ب^2 + ٢ أ ب − حـ^2 = ك أ ب

∴ $\frac{أ^2 + ب^2 - حـ^2}{٢ أ ب} = \frac{(ك - ٢) أ ب}{٢ أ ب}$

∴ جتا حـ = $\frac{ك - ٢}{٢}$

، ∵ صفر < ق (د حـ) < ١٨٠°

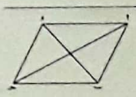
∴ −١ < جتا حـ < ١ ∴ −١ < $\frac{ك - ٢}{٢}$ < ١

∴ −٢ < ك − ٢ < ٢ ∴ صفر < ك < ٤

∴ ك ∈]٠ ، ٤[، عندما ك = ١

∴ جتا حـ = $\frac{-١}{٢}$ ∴ ق (د حـ) = ١٢٠°

٤٣



من Δ أ ب حـ :

(أ حـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب حـ)^2

− ٢ (أ ب) × (ب حـ) جتا (د أ ب حـ) (١)

، من Δ ب حـ ء :

(ب ء)^2 = (ب حـ)^2 + (ء حـ)^2 − ٢ (ب حـ)

× (ء حـ) جتا (د ء حـ ب)

، ∵ ء حـ = أ ب ، جتا (د ء حـ ب) = − جتا (د أ ب حـ)

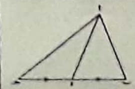
∴ (ب ء)^2 = (ب حـ)^2 + (أ ب)^2 + ٢ (ب حـ)

× (أ ب) جتا (د أ ب حـ) (٢)

وبجمع (١) ، (٢) :

∴ (أ حـ)^2 + (ب ء)^2 = ٢ (أ ب)^2 + ٢ (ب حـ)^2

٤٤



من Δ أ ب ء

(أ ب)^2 = (أ ء)^2 + (ب ء)^2

− ٢ (أ ء) (ب ء) جتا (د أ ء ب) (١)

من Δ أ ء حـ :

(أ حـ)^2 = (أ ء)^2 + (حـ ء)^2

− ٢ (أ ء) (حـ ء) جتا (د أ ء حـ) (٢)

، ∵ جتا (د أ ء ب) = − جتا (د أ ء حـ) ، حـ ء = ب ء

وبجمع (١) ، (٢) :

∴ (أ ب)^2 + (أ حـ)^2 = ٢ (أ ء)^2 + ٢ (ب ء)^2

∴ (٥)^2 + (٨)^2 = ٢ (أ ء)^2 + ٢ (٦)^2

∴ أ ء = $\frac{\sqrt{٣٤}}{٢}$ سم

٤٥

ظتا ب + ظتا حـ = $\frac{جتا ب}{جا ب} + \frac{جتا حـ}{جا حـ}$

= $\frac{أ^2 + حـ^2 - ب^2}{٢ أ حـ جا ب} + \frac{أ^2 + ب^2 - حـ^2}{٢ أ ب جا حـ}$

= $\frac{أ^2 + حـ^2 - ب^2}{٤ Δ} + \frac{أ^2 + ب^2 - حـ^2}{٤ Δ}$

= $\frac{٢ أ^2}{٤ Δ} = \frac{أ^2}{٢ Δ}$

٤٦

∵ ب^2 = حـ^2 − ٢ حـ أ + أ^2 + حـ أ

∴ ب^2 = حـ^2 + أ^2 − حـ أ

، ∵ ب^2 = حـ^2 + أ^2 − ٢ أ حـ جتا ب

∴ حـ أ = ٢ أ حـ جتا ب ∴ جتا ب = $\frac{١}{٢}$

∴ ق (د ب) = ٦٠°

٤٧

في Δ س ص ع :

∵ س^2 = ص^2 + ع^2 − ٢ ص ع جتا س

، ∵ س^2 = ص^2 + ع^2 − ص ع ظتا س

∴ ٢ جتا س = ظتا س

∴ ٢ جتا س = $\frac{جتا س}{جا س}$

∴ ٢ جتا س جا س − جتا س = ٠

∴ جتا س (٢ جا س − ١) = ٠

∴ إما جتا س = ٠ ومنها س = ٩٠°

أ، جا س = $\frac{١}{٢}$ ∴ س = ٣٠° أ، ١٥٠°

∴ ق (د س) = ٩٠° أ، ٣٠° أ، ١٥٠°

٤٨

∵ جتا ب = $\frac{أ^2 + حـ^2 - ب^2}{٢ أ حـ}$

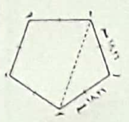
∴ $\frac{حـ}{٢ أ} = \frac{أ^2 + حـ^2 - ب^2}{٢ أ حـ}$

∴ حـ^2 = أ^2 + حـ^2 − ب^2

∴ أ^2 = ب^2 ∴ أ = ب

∴ Δ أ ب حـ متساوى الساقين.

٤٩



∵ أ ب حـ ء هـ

خماسي منتظم

∴ ق (د ب) = ١٠٨°

∴ (أ حـ)^2

= (١٨,٢٦)^2 + (١٨,٢٦)^2

−٢ (١٨,٢٦) (١٨,٢٦) × جتا ١٠٨°

∴ أ حـ = ٢٩,٥ سم

٥٠

حل زياد خطأ لأن قانون الجيب يجعل جيب الزاوية الحادة أو المنفرجة دائمًا موجبًا رغم أن الزاوية هنا منفرجة ويؤكد ذلك استخدام قاعدة جيب التمام في حل كريم.

٥١

① (ب) ② (د) ③ (ب) ④ (ب)

⑤ (ب) ⑥ (أ) ⑦ (جـ) ⑧ (د)

⑨ (ب) ⑩ (ب) ⑪ (أ)

إرشادات لحل رقم ٥١

① ∵ أ ب = $\sqrt{(٣ - ٠)^2 + (٤ - ١)^2}$ = ٣ $\sqrt{٢}$

، ب حـ = $\sqrt{(١ - ٢)^2 + (٣ - ٤)^2}$ = $\sqrt{٥}$

، أ حـ = $\sqrt{(١ - ٠)^2 + (٣ - ١)^2}$ = $\sqrt{٥}$

∴ جتا (د أ حـ ب)

= $\frac{(\sqrt{٥})^2 + (\sqrt{٥})^2 - (٣\sqrt{٢})^2}{٢ \times \sqrt{٥} \times \sqrt{٥}}$

= $\frac{-٤}{٥}$

② • إذا علم طول $\overline{أ ب}$ تعين ق (د أ حـ ب) وبالتالي ق (د ء حـ هـ) ، طول $\overline{ء هـ}$

• إذا علم مساحة Δ أ ب حـ تعين ق (د أ حـ ب) وبالتالي ق (د ء حـ هـ) ، طول $\overline{ء هـ}$

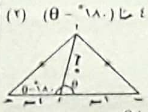
• إذا علم محيط Δ أ ب حـ عُلم طول $\overline{أ ب}$ وبالتالي تعين ق (د أ حـ ب) ، ق (د ء حـ هـ) ، طول $\overline{ء هـ}$

∴ معرفة أي مما سبق يصلح لإيجاد طول $\overline{ء هـ}$

③ ∵ (أ ب)^2 = (٥)^2 + (٦)^2 − ٢ × ٥ × ٦ جتا θ (١)

، (أ حـ)^2 = (٥)^2 + (٤)^2

− ٢ × ٥ × ٤ جتا (١٨٠° − θ) (٢)



، ∵ أ ب = أ حـ

ومن (١) ، (٢)

∴ ٢٥ + ٣٦ − ٦٠ جتا θ

= ٢٥ + ١٦ + ٤٠ جتا θ

∴ ١٠٠ جتا θ = ٢٠ ∴ جتا θ = $\frac{١}{٥}$

∴ (أ ب)^2 = ٢٥ + ٣٦ − ٦٠ × $\frac{١}{٥}$ = ٤٩

∴ أ ب = ٧ سم

④ ∵ الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى
∴ جتا أ = − جتا حـ
∴ فى Δ أ ب ء
(ب ء)^2 = (٣)^2 + (٢)^2 − ٢ × ٣ × ٢ جتا أ (١)
، فى Δ حـ ب ء
(ب ء)^2 = (٣)^2 + (٤)^2 − ٢ × ٣ × ٤ جتا حـ (٢)
من (١) ، (٢)
∴ ٩ + ٤ − ١٢ جتا أ = ٩ + ١٦ + ٢٤ جتا أ
∴ ٣٦ جتا أ = − ١٢ ∴ جتا أ = $-\frac{١}{٣}$

⑤ ∵ أحـ ، ء ب وتران متقاطعان فى الدائرة فى النقطة هـ
∴ أهـ × هـ حـ = ء هـ × هـ ب
∴ ٣ × ٤ = ٢ × هـ ب ∴ هـ ب = ٦ سم
∴ جتا (د ب أ هـ) = $\frac{(٣)^2 + (٨)^2 - (٦)^2}{٢ \times ٣ \times ٨} = \frac{٣٧}{٤٨}$
∴ ق (د ب أ هـ) = ٣٩ ٣٤°

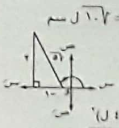
⑥ فى Δ أ ب حـ
∵ (أ ب)^2 = (٦)^2 + (١٢)^2 − ٢ × ٦ × ١٢ × جتا (٠.٤)^{ء}
∴ أ ب = ٦.٩ سم
، ∵ هـ^{ء} = $\frac{ل}{نق}$
∴ طول $\frown{ب ء}$ = ٠.٤ ^{ء} × ٦ = ٢.٤ سم
∴ محيط الجزء المظلل = ٦.٩ + ٢.٤ + ٦ = ١٥.٣

⑦ ∵ جتا أ = $\frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{٢ ب حـ}$
∴ ب^2 + حـ^2 − أ^2 = ٢ ب حـ جتا أ
∴ (ب^2 + حـ^2 − أ^2) ظا أ
= ٢ ب حـ جتا أ × $\frac{جا أ}{جتا أ}$ = ٢ ب حـ جا أ
= ٤ × ($\frac{١}{٢}$ ب حـ جا أ) = ٤ × ١٢ = ٤٨

⑧ (١ + $\frac{أ}{حـ}$ + $\frac{ب}{حـ}$) (١ + $\frac{حـ}{ب}$ − $\frac{أ}{ب}$)
= ($\frac{حـ + أ + ب}{حـ}$) ($\frac{ب + حـ − أ}{ب}$)
= $\frac{(ب + حـ)^2 - أ^2}{ب حـ} = \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2 + ٢ ب حـ}{ب حـ}$
= $\frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{ب حـ}$ + ٢
= ٢ جتا أ + ٢ = ٢ ($\frac{١}{٢}$) + ٢ = ٣

⑨ ∵ $\frac{أ^3 + ب^3 + حـ^3}{أ + ب + حـ}$ = أ^2
∴ أ^3 + ب^3 + حـ^3 = أ^3 + ب أ^2 + حـ أ^2
∴ ب^3 + حـ^3 = ب أ^2 + حـ أ^2
∴ (ب + حـ) (ب^2 − ب حـ + حـ^2) = أ^2 (ب + حـ)
∴ أ^2 = ب^2 − ب حـ + حـ^2
∴ ب^2 + حـ^2 − أ^2 = ب حـ
∴ $\frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{٢ ب حـ} = \frac{١}{٢}$ ∴ جتا أ = $\frac{١}{٢}$
∴ ق (د أ) = ٦٠°

⑩ بفرض طول ضلع المربع الصغير = ل سم
∴ طول ضلع المربع الأكبر = ٣ ل سم
∴ س هـ = $\sqrt{ل^2 + ل^2} = \sqrt{٢}$ ل سم
، ب س = $\sqrt{ل^2 + (٣ ل)^2} = \sqrt{١٠}$ ل سم
، ب هـ = ٤ ل سم



∴ جتا (د ب س هـ)
= $\frac{(\sqrt{٢} ل)^2 + (\sqrt{١٠} ل)^2 - (٤ ل)^2}{٢ \times \sqrt{٢} ل \times \sqrt{١٠} ل}$
= $\frac{-٤ ل^2}{٤ \sqrt{٥} ل^2} = \frac{-١}{\sqrt{٥}}$
∴ جا (د ب س هـ) = $\frac{٢}{\sqrt{٥}}$

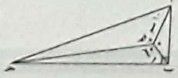
⑪ ∵ ب حـ = $\sqrt{(٦٠)^2 + (٨٠)^2}$ = ١٠٠ سم
، ∵ محيط Δ أ حـ ء = محيط Δ أ ب ء
∴ أ حـ + حـ ء = أ ب + ب ء (لأن $\overline{أ ء}$ مشترك)
∴ ٨٠ + حـ ء = ٦٠ + (١٠٠ − حـ ء)
∴ ٢ حـ ء = ٨٠
∴ حـ ء = ٤٠ سم ، ب ء = ٦٠ سم
فى Δ أ ب ء :
∴ (أ ء)^2 = (٦٠)^2 + (٦٠)^2 − ٢ (٦٠) (٦٠) جتا ب
∵ جتا ب = $\frac{٦٠}{١٠٠}$ = ٠.٦
∴ (أ ء)^2 = ٣٦٠٠ + ٣٦٠٠ − ٢ × ٣٦٠٠ × ٠.٦
∴ أ ء = ٢٤ $\sqrt{٥}$ سم

٥٢

∵ $\frac{أ^2 + حـ^2 - ب^2}{٢ أ^2 حـ} = \frac{ب^2 + حـ^2 - أ^2}{٢ ب^2 حـ}$
∴ أ^2 ب^2 + ب^2 حـ^2 − ب^4 = أ^2 ب^2 + أ^2 حـ^2 − أ^4
∴ (أ^2 − ب^2) حـ^2 − (أ^2 − ب^2) (أ^2 + ب^2) = ٠
∴ (أ^2 − ب^2) (حـ^2 − أ^2 − ب^2) = ٠
∴ أ^2 = ب^2 أ، حـ^2 = أ^2 + ب^2
∴ أ = ب أى المثلث أ ب حـ متساوى الساقين
أ، المثلث أ ب حـ قائم الزاوية فى حـ

٥٣

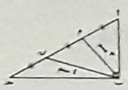
∵ ق (د أ هـ ب) = ق (د أ هـ حـ)
= ق (د ب هـ حـ) = $\frac{٣٦٠°}{٣}$ = ١٢٠°
فى Δ أ ب هـ :
(أ ب)^2 = ٣٦ + ١٠٠ − ٢ × ٦ × ١٠ × جتا ١٢٠°
∴ أ ب = ١٤ سم
وبفرض هـ حـ = س



∴ فى Δ أ هـ حـ
(أ حـ)^2 = ١٠٠ + س^2 − ٢ × ١٠ × س جتا ١٢٠°
∴ (أ حـ)^2 = ١٠٠ + س^2 + ١٠ س
فى Δ ب هـ حـ :
(ب حـ)^2 = ٣٦ + س^2 − ٢ × ٦ × س جتا ١٢٠°
∴ (ب حـ)^2 = ٣٦ + س^2 + ٦ س
، من Δ أ ب حـ : (أ حـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب حـ)^2
∴ ١٠٠ + س^2 + ١٠ س = ١٩٦ + ٣٦ + س^2 + ٦ س
∴ ٤ س = ١٣٢ ∴ س = ٣٣ سم
∴ هـ حـ = ٣٣ سم

٥٤

بفرض أن
، أ م = م ن = ن حـ = س
، أ ب = ص



من Δ أ ب م :
جتا أ = $\frac{ص^2 + س^2 - ٩}{٢ س ص}$
∴ $\frac{ص}{٣ س} = \frac{ص^2 + س^2 - ٩}{٢ س ص}$
∴ ٢ ص^2 = ٣ ص^2 + ٣ س^2 − ٢٧
∴ ص^2 + ٣ س^2 = ٢٧ (١)
من Δ أ ب ن :
جتا أ = $\frac{ص^2 + ٤ س^2 - ١٦}{٢ \times ص \times ٢ س}$
∴ $\frac{ص}{٣ س} = \frac{ص^2 + ٤ س^2 - ١٦}{٤ س ص}$
∴ ٤ ص^2 = ٣ ص^2 + ١٢ س^2 − ٤٨
∴ − ص^2 + ١٢ س^2 = ٤٨ (٢)

بجمع (١) ، (٢) :

∴ ١٥ س^{٢} = ٧٥ ∴ س^{٢} = ٥ ∴ س = $\sqrt{٥}$ سم

وبالتعويض فى (١) :

∴ ص^{٢} + ١٥ = ٢٧ ∴ ص^{٢} = ١٢

∴ ص = ٢ $\sqrt{٣}$ سم

∴ ب جـ = $\sqrt{(٢\sqrt{٥})^{٢} - ١٢}$ = $\sqrt{٣٢}$

∴ محيط Δ أ ب جـ = أ ب + ب جـ + أ جـ

= ٢ $\sqrt{٣}$ + $\sqrt{٣٢}$ + ٢ $\sqrt{٥}$ = ١٦ سم

٥٥

① ∵ $\frac{\text{جتا أ}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢} - \text{أ}^{٢}}{\text{٢ ب جـ} \times \text{أ}}$

، $\frac{\text{جتا ب}}{\text{ب}} = \frac{\text{أ}^{٢} + \text{جـ}^{٢} - \text{ب}^{٢}}{\text{٢ أ جـ} \times \text{ب}}$ ، $\frac{\text{جتا جـ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{جـ}^{٢}}{\text{٢ أ ب} \times \text{جـ}}$

∴ $\frac{\text{جتا أ}}{\text{أ}} + \frac{\text{جتا ب}}{\text{ب}} + \frac{\text{جتا جـ}}{\text{جـ}}$

$= \frac{\text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢} - \text{أ}^{٢} + \text{أ}^{٢} + \text{جـ}^{٢} - \text{ب}^{٢} + \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{جـ}^{٢}}{\text{٢ أ ب جـ}}$

$= \frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢}}{\text{٢ أ ب جـ}}$

② ∵ أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢} = ب^{٢} + جـ^{٢} - ٢ ب جـ جتا أ

+ جـ^{٢} + أ^{٢} - ٢ جـ أ جتا ب + أ^{٢} + ب^{٢} - ٢ أ ب جتا جـ

∴ أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢}

= ٢ أ^{٢} + ٢ ب^{٢} + ٢ جـ^{٢} - ٢ ب جـ جتا أ - ٢ جـ أ جتا ب

- ٢ أ ب جتا جـ

∴ أ^{٢} + ب^{٢} + جـ^{٢}

= ٢ (ب جـ جتا أ + جـ أ جتا ب + أ ب جتا جـ)

③ $\frac{\text{ظا أ}}{\text{ظا جـ}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}} \div \frac{\text{جا جـ}}{\text{جتا جـ}} = \frac{\text{جا أ}}{\text{جا جـ}} \times \frac{\text{جتا جـ}}{\text{جتا أ}}$

$= \frac{\text{أ}}{\text{جـ}} \times \frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{جـ}^{٢}}{\text{٢ أ ب}} \times \frac{\text{٢ ب جـ}}{\text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢} - \text{أ}^{٢}}$

$= \frac{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢} - \text{جـ}^{٢}}{\text{ب}^{٢} + \text{جـ}^{٢} - \text{أ}^{٢}}$

إجابات تمارين 21

أولا مسائل على الحالة الأولى لحل المثلث (طول ضلع وقياسا زاويتين)

١

ق (د ب) = ١٨٠° - (٦٧° + ٤٦°) = ٦٧°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ٦٧°}} = \frac{١١}{\text{جا ٦٧°}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا ٤٦°}}$

∴ أ = ١١ سم ، جـ = ٨٫٦ سم

٢

ق (د م) = ١٨٠° - (٦١ َ ٣٣° + ٦١٩ َ ٤٤°) = ٢٥ َ ١٠٢°

∴ $\frac{\text{لَ}}{\text{جا ١٦ َ ٣٣°}} = \frac{١٧}{\text{جا ٢٥ َ ١٠٢°}} = \frac{\text{نَ}}{\text{جا ١٩ َ ٤٤°}}$

∴ لَ = ٩٫٥ سم ، نَ = ١٢٫٢ سم

٣

ق (د أ) = ٨٠° ، ق (د ب) = ٤٠°

∴ ق (د جـ) = ١٨٠° - (٨٠° + ٤٠°) = ٦٠°

∴ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{جا ٨٠°}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا ٤٠°}} = \frac{٩}{\text{جا ٦٠°}}$

∴ ب جـ = ١٠٫٢ سم ، أ جـ = ٦٫٧ سم

، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ب جـ × أ جـ × جا جـ

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠٫٢ × ٦٫٧ × جا ٦٠°

≃ ٣٠ سم^{٢}

٤

ق (د ع) = ١٨٠° - (١٢ َ ٧٥° + ١٥ َ ٤٨°) = ٣٣ َ ٥٦°

∴ $\frac{\text{ص ع}}{\text{جا ١٢ َ ٧٥°}} = \frac{\text{س ع}}{\text{جا ١٥ َ ٤٨°}} = \frac{٤٠}{\text{جا ٣٣ َ ٥٦°}}$

∴ ص ع = ٤٦٫٤ سم ، س ع ≃ ٣٥٫٨ سم

، الارتفاع المطلوب = ص ع × جا ص

= ٤٦٫٤ جا ١٥ َ ٤٩° = ٣٤٫٦ سم

ثانيا مسائل على الحالة الثانية لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية محصورة)

٥

جـ^{٢} = (٥)^{٢} + (٧)^{٢} - ٢ (٥) (٧) جتا ٦٥°

∴ جـ = ٦٫٧ سم

∴ جتا ب = $\frac{(٥)^{٢} + (٦٫٧)^{٢} - (٧)^{٢}}{٢ \times ٥ \times ٦٫٧}$

∴ ق (د ب) = ٥٠ َ ٧١°

∴ ق (د أ) = ١٨٠° - (٥٠ َ ٧١° + ٦٥°) ≃ ١٠ َ ٤٣°

٦

أ^{٢} = (٦)^{٢} + (٦)^{٢} - ٢ × ٦ × ٦ × جتا ١٢ َ ١٥٣°

∴ أ = ١١٫٦٧ سم

، ق (د ب) = ق (د جـ) = $\frac{١٨٠° - ١٢ َ ١٥٣°}{٢}$ = ٤٨ َ ١٣°

٧

ق (د م) = ٢٫ ٦٩ = ٤٥ َ ٦٨°

∴ مَ^{٢} = (١٢٫٥)^{٢} + (٧٫٢٥)^{٢} - ٢ × ١٢٫٥

× ٧٫٢٥ جتا ٤٥ َ ٦٨°

∴ مَ ≃ ١١٫٦٩ سم

∴ جتا ل = $\frac{(١١٫٩٦)^{٢} + (٧٫٢٥)^{٢} - (١٢٫٥)^{٢}}{٢ \times ١١٫٩٦ \times ٧٫٢٥}$

∴ ق (د ل) ≃ ٥٣ َ ٧٦°

∴ ق (د ن) = ١٨٠° - (٤٥ َ ٦٨° + ٥٣ َ ٧٦°)

= ٢٢ َ ٣٤°

٨

(ل ن)^{٢} = (٤٨٫٥)^{٢} + (٤٦)^{٢} - ٢ × ٤٨٫٥ × ٤٦

× (-٠٫٦)

∴ ل ن ≃ ٨٤٫٥٣ سم

، جتا ل = $\frac{(٤٨٫٥)^{٢} + (٨٤٫٥٣)^{٢} - (٤٦)^{٢}}{٢ \times ٤٨٫٥ \times ٨٤٫٥٣}$

∴ ق (د ل) = ٤٨ َ ٢٥° ، ق (د م) = ٥٢ َ ١٢٦°

∴ ق (د ن) = ٢٠ َ ٣٧°

ثالثا مسائل على الحالة الثالثة لحل المثلث (أطوال ثلاثة أضلاع)

٩

① جتا أ = $\frac{(٢٧)^{٢} + (٢٤)^{٢} - (١٥)^{٢}}{٢ \times ٢٧ \times ٢٤}$

∴ ق (د أ) = ٣٣ َ ٣٣°

، جتا ب = $\frac{(١٥)^{٢} + (٢٧)^{٢} - (٢٤)^{٢}}{٢ \times ١٥ \times ٢٧}$

∴ ق (د ب) = ١١ َ ٦٢°

، ق (د جـ) = ١٨٠° - (٣٣ َ ٣٣° + ١١ َ ٦٢°) = ١٦ َ ٨٤°

② جتا أ = $\frac{(٣٥)^{٢} + (١٧)^{٢} - (٢٨)^{٢}}{٢ \times ٣٥ \times ١٧}$

∴ ق (د أ) = ١٠ َ ٥٢°

، جتا ب = $\frac{(٢٨)^{٢} + (١٧)^{٢} - (٣٥)^{٢}}{٢ \times ٢٨ \times ١٧}$

∴ ق (د ب) = ١١ َ ٩٩° ، ق (د جـ) = ٣٩ َ ٢٨°

١٠

جتا أ = $\frac{(١٤)^{٢} + (١٥)^{٢} - (١٣)^{٢}}{٢ \times ١٤ \times ١٥}$

∴ ق (د أ) ≃ ٨ َ ٥٣°

، جتا ب = $\frac{(١٥)^{٢} + (١٣)^{٢} - (١٤)^{٢}}{٢ \times ١٥ \times ١٣}$

∴ ق (د ب) ≃ ٢٩ َ ٥٩°

∴ ق (د جـ) = ١٨٠° - (٨ َ ٥٣° + ٢٩ َ ٥٩°) = ٢٣ َ ٦٧°

١١

جتا أ = $\frac{(٨)^{٢} + (٤)^{٢} - (٥)^{٢}}{٢ (٨) (٤)}$

∴ ق (د أ) ≃ ٤٥ َ ٣٠°

، جتا ب = $\frac{\text{(٥)}^2 + \text{(٤)}^2 - \text{(٨)}^2}{\text{٢ (٥) (٤)}}$

∴ ق (∠ب) = ١٢٥° ٩َ

∴ ق (∠حـ) = ١٨٠° - (٤٥ َ ٣٠° + ٩ َ ١٢٥°) = ٩ َ ٢٤°

١٢

جتا أ = $\frac{\text{(٤}\sqrt{\text{٢}}\text{)}^2 + \text{(٢}\sqrt{\text{٥}}\text{)}^2 - \text{(٢)}^2}{\text{٢} \times \text{٤}\sqrt{\text{٢}} \times \text{٢}\sqrt{\text{٥}}}$

∴ ق (∠أ) = ٢٦ َ ١٨°

، جتا ب = $\frac{\text{(٢)}^2 + \text{(٢}\sqrt{\text{٥}}\text{)}^2 - \text{(٤}\sqrt{\text{٢}}\text{)}^2}{\text{٢} \times \text{٢} \times \text{٢}\sqrt{\text{٥}}}$

∴ ق (∠ب) = ٣٤ َ ١١٦°

∴ ق (∠حـ) = ١٨٠° - (٢٦ َ ١٨° + ٣٤ َ ١١٦°) = ٤٥°

رابعًا مسائل على الحالة الرابعة لحل المثلث (طولا ضلعين وقياس زاوية مقابلة لأحدهما)

١٣

$\frac{\text{١٠}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{٩}}{\text{جا ٥٧°}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ ∴ جا أ = $\frac{\text{١٠ جا ٥٧°}}{\text{٩}}$

∴ ق (∠أ) = ٤٤ َ ٦٨° أ، ق (∠أ) = ١٦ َ ١١١°

ومنها ق (∠حـ) = ١٦ َ ٥٤° أ، ق (∠حـ) = ٤٤ َ ١١°

، ∵ $\frac{\text{٩}}{\text{جا ٥٧°}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$

∴ حـَ = ٨.٧ سم أ، حـَ = ٢.٢ سم

١٤

$\frac{\text{٤}}{\text{جا ٥٠°}} = \frac{\text{٣}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}}$ ∴ جا ب = $\frac{\text{٣ جا ٥٠°}}{\text{٤}}$

∴ ق (∠ب) = ٤ َ ٣٥°

أ، ق (∠ب) = ٥٦ َ ١٤٤° (مرفوض)

∴ ق (∠حـ) = ٥٦ َ ٩٤°

∴ $\frac{\text{حـ}}{\text{جا ٥٦ َ ٩٤°}} = \frac{\text{٤}}{\text{جا ٥٠°}}$ ∴ حـَ = ٥.٢ سم

١٥

$\frac{\text{١٢}}{\text{جا ١١٦°}} = \frac{\text{١٠}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}}$ ∴ جا أ = $\frac{\text{١٠ جا ١١٦°}}{\text{١٢}}$

∴ ق (∠أ) = ٣٠ َ ٤٨°

أ، ق (∠أ) = ٣٠ َ ١٣١° (مرفوض)

، ق (∠ب) = ١٨٠° - (٣٠ َ ٤٨° + ١١٦°) = ٣٠ َ ١٥°

∴ $\frac{\text{ب}}{\text{جا ٣٠ َ ١٥°}} = \frac{\text{١٢}}{\text{جا ١١٦°}}$ ∴ بَ = ٣.٦ سم

١٦

① ∵ ∠أ منفرجة ، أ > ب ∴ يوجد حل وحيد.

∴ $\frac{\text{١٥}}{\text{جا ١٢٠°}} = \frac{\text{١٠}}{\text{جا ب}}$ ∴ جا ب = $\frac{\text{١٠ جا ١٢٠°}}{\text{١٥}}$

∴ ق (∠ب) = ٣٥°

، ق (∠حـ) = ١٨٠° - (٣٥° + ١٢٠°) = ٢٥°

∴ $\frac{\text{حـ}}{\text{جا ٢٥°}} = \frac{\text{١٥}}{\text{جا ١٢٠°}}$ ∴ حـَ = ٧.٣ سم

② ∵ ∠حـ منفرجة ، حـَ > أ ∴ يوجد حل وحيد

∴ $\frac{\text{١٦}}{\text{جا ١١٥°}} = \frac{\text{٤}}{\text{جا أ}}$ ∴ جا أ = $\frac{\text{٤ جا ١١٥°}}{\text{١٦}}$

∴ ق (∠أ) = ١٣°

، ق (∠ب) = ١٨٠° - (١١٥° + ١٣°) = ٥٢°

، $\frac{\text{١٦}}{\text{جا ١١٥°}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ٥٢°}}$ ∴ بَ = ١٣.٩ سم

③ ∵ ∠أ منفرجة ، أ < ب

∴ الشروط لاتحقق وجود أى مثلث على الإطلاق

④ ∵ ∠أ حادة ، ع = ٢٨ جا ٤٢° = ١٨.٧ سم

، ١٨.٧ < ٢٠ < ٢٨ ∴ يوجد للمثلث حلان.

∴ $\frac{\text{٢٠}}{\text{جا ٤٢°}} = \frac{\text{٢٨}}{\text{جا ب}}$

∴ ق (∠ب) = ٧٠° أ، ق (∠ب) = ١١٠°

∴ ق (∠حـ) = ١٨٠° - (٧٠° + ٤٢°) = ٦٨°

أ، ق (∠حـ) = ١٨٠° - (١١٠° + ٤٢°) = ٢٨°

، ∵ $\frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}} = \frac{\text{٢٠}}{\text{جا ٤٢°}}$

∴ حـَ = ٢٧.٧ سم أ، حـَ = ١٤ سم

⑤ ∵ ∠أ حادة ، ع = ٧ جا ٦٠° = ٦.١ سم

∴ أ < ع

∴ الشروط لاتحقق وجود أى مثلث على الإطلاق.

⑥ ∵ ∠أ حادة ، أ > حـَ ∴ يوجد حل وحيد.

∴ $\frac{\text{١٢}}{\text{جا ٢٧°}} = \frac{\text{٧}}{\text{جا حـ}}$ ∴ ق (∠حـ) ≃ ١٥°

∴ ق (∠ب) = ١٨٠° - (١٥° + ٢٧°) = ١٣٨°

∴ $\frac{\text{ب}}{\text{جا ١٣٨°}} = \frac{\text{١٢}}{\text{جا ٢٧°}}$ ∴ بَ = ١٧.٧ سم

⑦ ∵ ∠ب حادة ، ع = ٤$\sqrt{\text{٣}}$ جا ٦٠° = ٦ سم

∵ ع = بَ

∴ يوجد مثلث وحيد قائم الزاوية.

∴ $\frac{\text{٦}}{\text{جا ٦٠°}} = \frac{\text{٤}\sqrt{\text{٣}}}{\text{جا أ}}$ ∴ ق (∠أ) = ٩٠°

∴ ق (∠حـ) = ١٨٠° - (٩٠° + ٦٠°) = ٣٠°

∴ $\frac{\text{حـ}}{\text{جا ٣٠°}} = \frac{\text{٦}}{\text{جا ٦٠°}}$ ∴ حـَ = ٣.٥ سم

⑧ ∵ ∠أ حادة ، ع = ٨ جا ٤٧° ≃ ٥.٩ سم

∴ ع < أ < ب ∴ يوجد للمثلث حلان.

∴ $\frac{\text{٦}}{\text{جا ٤٧°}} = \frac{\text{٨}}{\text{جا ب}}$

∴ ق (∠ب) = ٧٧° أ، ق (∠ب) = ١٠٣°

∴ ق (∠حـ) = ١٨٠° - (٤٧° + ٧٧°) = ٥٦°

أ، ق (∠حـ) = ١٨٠° - (٤٧° + ١٠٣°) = ٣٠°

، ∵ $\frac{\text{حـ}}{\text{جا حـ}} = \frac{\text{٦}}{\text{جا ٤٧°}}$ ∴ حـ = ٦.٨ سم

أ، حـَ = ٤.١ سم

١٧

∵ ∠ب حادة ، ع = ٤٢ جا ٥٨° ≃ ٣٥.٦٢ سم

∴ لا يكون للمثلث حل إذا كان : ب < ٣٥.٦٢ سم

خامسًا مسائل متنوعة

١٨

∵ Δ أ ب حـ متساوى الساقين ، ق (∠أ) = ١١٠°

∴ ق (∠ب) = ق (∠حـ) = $\frac{\text{١٨٠° - ١١٠°}}{\text{٢}}$ = ٣٥°

∴ $\frac{\text{٨}}{\text{جا ١١٠°}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ٣٥°}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا ٣٥°}}$

∴ ب = حـَ = ٤.٩ سم

١٩

∵ جتا ب = $\frac{\text{٣}}{\text{٥}}$ (موجبة)

∴ ∠ب حادة

∴ ق (∠ب) = ٨ َ ٥٣° ، ق (∠حـ) = ٢٧ َ ٢٢°

∴ ق (∠أ) = ١٥ َ ١٠٤°

∴ $\frac{\text{٢١}}{\text{جا ١٥ َ ١٠٤°}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ٨ َ ٥٣°}} = \frac{\text{حـ}}{\text{جا ٢٧ َ ٢٢°}}$

∴ ب = ١٧.٣ سم ، حـَ = ٨.٢ سم

٢٠

∵ مساحة المثلث أ ب حـ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ أ حـَ جا ب

∴ ١٠$\sqrt{\text{٣}}$ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ × ٥ حـَ جا ١٢٠°

∴ حـَ = ٨ سم

∴ ب^2 = (٥)^2 + (٨)^2 - ٢ × ٥ × ٨ جتا ١٢٠°

∴ ب = ١١.٣٦ سم

∴ جتا أ = $\frac{\text{(١١.٣٦)}^2 + \text{(٨)}^2 - \text{(٥)}^2}{\text{٢} \times \text{١١.٣٦} \times \text{٨}}$

∴ ق (∠أ) = ٢٤ َ ٢٢° ∴ ق (∠حـ) = ٣٦ َ ٣٧°

٢١

ق (∠أ) = $\frac{\text{٤}}{\text{١٥}}$ × ١٨٠° = ٤٨°

، ق (∠ب) = $\frac{\text{٥}}{\text{١٥}}$ × ١٨٠° = ٦٠°

، ق (∠حـ) = $\frac{\text{٦}}{\text{١٥}}$ × ١٨٠° = ٧٢°

∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}} = \frac{\text{أ + ب + جـ}}{\text{جا أ + جا ب + جا جـ}}$

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ٤٨°}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ٦٠°}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا ٧٢°}} = \frac{\text{٥٠}}{\text{٢٫٥٦}}$

∴ أ ≃ ١٤٫٥ سم ، ب ≃ ١٦٫٩ سم ، جـ ≃ ١٨٫٦ سم

٢٢

بفرض أن:

جا أ = ٢ ك ، جا ب = ٤ ك ، جا جـ = ٦ ك

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{٢ ك}} = \frac{\text{ب}}{\text{٤ ك}} = \frac{\text{جـ}}{\text{٦ ك}} = \frac{\text{أ + ب + جـ}}{\text{١٣ ك}}$

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{٢}} = \frac{\text{ب}}{\text{٤}} = \frac{\text{جـ}}{\text{٦}} = \frac{\text{٥٢}}{\text{١٣}}$

∴ أ = ١٢ سم ، ب = ١٦ سم ، جـ = ٢٤ سم

∴ جتا أ = $\frac{(\text{١٦})^2 + (\text{٢٤})^2 - (\text{١٢})^2}{\text{٢ × ١٦ × ٢٤}}$

∴ ق(∠ أ) ≃ ٢٦° ٢٣َ

، جتا ب = $\frac{(\text{١٢})^2 + (\text{٢٤})^2 - (\text{١٦})^2}{\text{٢ × ١٢ × ٢٤}}$

∴ ق(∠ ب) ≃ ٣٦° ٢٠َ ∴ ق(∠ جـ) = ١١٧° ١٧َ

٢٣

$\frac{\text{٢١}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{٢٥}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}} = \text{٢٨}$

∴ ق(∠ أ) ≃ ٤٨° ٣٥َ ، ق(∠ ب) = ٦٣° ١٤َ

∴ ق(∠ جـ) = ٦٨° ١١َ

∴ جـ = ٢٨ جا ٦٨° ١١َ ≃ ٢٦ سم

٢٤

$\frac{\text{أ}}{\text{جا ٨٢°}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{٥}}{\text{جا جـ}} = \text{١٦}$ ∴ أ ≃ ١٥٫٨ سم

، ∵ أ > جـ ∴ ∠ جـ حادة.

، ∵ جا جـ = $\frac{\text{٥}}{\text{١٦}}$ ∴ ق(∠ جـ) ≃ ١٨° ١٣َ

∴ ق(∠ ب) = ١٨٠° − (٨٢° + ١٨° ١٣َ) = ٧٩° ٤٧َ

∴ ب = ١٦ جا ٧٩° ٤٧َ ≃ ١٥٫٧ سم

٢٥

∵ ٢ × $\frac{\text{٢٢}}{\text{٧}}$ × نق = ٤٤ ∴ ٢ نق = ١٤

∴ $\frac{\text{٧}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ٤٠°}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}} = \text{١٤}$

∴ ب = ١٤ جا ٤٠° ≃ ٩ سم

، ∵ ب > أ ∴ ∠ أ حادة.

، ∵ جا أ = $\frac{\text{٧}}{\text{١٤}}$ ∴ ق(∠ أ) = ٣٠°

∴ ق(∠ جـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٣٠°) = ١١٠°

∴ جـ = ١٤ جا ١١٠° ≃ ١٣ سم

٢٦

ق(∠ ص) = ١٨٠° − (٨٢° + ٥٦°) = ٤٢°

∴ $\frac{\text{سَ}}{\text{جا ٨٢°}} = \frac{\text{صَ}}{\text{جا ٤٢°}} = \frac{\text{عَ}}{\text{جا ٥٦°}} = \text{ك}$

∴ سَ = ك جا ٨٢° ، صَ = ك جا ٤٢°

∴ ٩٠٠ = $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ (ك جا ٨٢°) (ك جا ٤٢°) جا ٥٦°

∴ ك = ٥٧ ويرفض الحل السالب.

∴ سَ = ٥٦ سم ، صَ = ٣٨ سم ، عَ = ٤٧ سم

٢٧

ق(∠ جـ) = ١٨٠° − (٣٥° + ٧٥°) = ٧٠°

∴ $\frac{\text{أ}}{\text{جا ٣٥°}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ٧٥°}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا ٧٠°}} = \frac{\text{أ + ٢ جـ}}{\text{جا ٣٥° + ٢ جا ٧٠°}}$

$= \frac{\text{٢٥}}{\text{جا ٣٥° + ٢ جا ٧٠°}}$

∴ أ = ٤٫٢ سم ، ب = ٧٫١ سم ، جـ = ٦٫٩ سم

٢٨

∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}}$ = ٢ نق ∴ $\frac{\text{١٣}}{\text{جا أ}}$ = ١٦

∴ ق(∠ أ) = ٥٤° ٢٠َ أو ١٢٥° ٤٠َ

عندما ق(∠ أ) = ٥٤° ٢٠َ

∴ ق(∠ جـ) = ٨٣° ٤٠َ

∴ $\frac{\text{١٣}}{\text{جا ٥٤° ٢٠َ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ٤٢°}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا ٨٣° ٤٠َ}}$

∴ ب = ١٠٫٧ سم ، جـ = ١٥٫٩ سم

عندما ق(∠ أ) = ١٢٥° ٤٠َ

∴ ق(∠ جـ) = ١٢° ٢٠َ

∴ $\frac{\text{١٣}}{\text{جا ١٢٥° ٤٠َ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ٤٢°}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا ١٢° ٢٠َ}}$

∴ ب = ١٠٫٧ سم ، جـ = ٣٫٤ سم

٢٩

① جتا أ = $\frac{(\text{٧٫٦٣})^2 + (\text{٦٫٤})^2 - (\text{٣٫٢})^2}{\text{٢ × ٧٫٦٣ × ٦٫٤}}$

∴ ق(∠ أ) = ٢٤° ٢٤َ

، جتا ب = $\frac{(\text{٣٫٢})^2 + (\text{٦٫٤})^2 - (\text{٧٫٦٣})^2}{\text{٢ × ٣٫٢ × ٦٫٤}}$

∴ ق(∠ ب) = ٩٩° ٥٢َ

∴ ق(∠ جـ) = ٥٥° ٤٤َ

② جـ² = (١٢)² + (٢١)² − ٢ × ١٢ × ٢١ جتا ٩٥°

∴ جـ = ٢٥٫٠٧٨ سم

، ∵ $\frac{\text{٢٥٫٠٧٨}}{\text{جا ٩٥°}} = \frac{\text{١٢}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{٢١}}{\text{جا ب}}$

∴ ق(∠ أ) = ٢٨° ٢٨َ ، ق(∠ ب) = ٥٦° ٣٢َ

③ لا يمكن تكوين المثلث لأن أ + جـ = ب

④ ع = ١٠ جا ٤٢° = ٦٫٦٩ سم

∴ ع < أ < ب

∴ يوجد حلان للمثلث.

∴ $\frac{\text{٧}}{\text{جا ٤٢°}} = \frac{\text{١٠}}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جا جـ}}$

∴ ق(∠ ب) ≃ ٧٢° ٥٥َ

ومنها ق(∠ جـ) ≃ ٦٥° ٥َ

، جـ = ٩٫٥ سم

أ، ق(∠ ب) ≃ ١٠٧° ٥َ

منها ق(∠ جـ) ≃ ٣٠° ٥٥َ

، جـ = ٥٫٤ سم

٣٠

① (أ) ② (جـ) ③ (أ)

إرشادات لحل رقم ٣٠

① ∵ $\frac{\text{أ}}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}}{\text{جا ب}}$ ∴ $\frac{\text{٣}}{\frac{\text{٥}}{\text{١٣}}} = \frac{\text{٨}}{\text{جا ب}}$

∴ جا ب = $\frac{\text{٤٠}}{\text{٣٩}}$ (مرفوض)

∴ الشروط لا تحقق وجود أي مثلث على الإطلاق

∴ عدد المثلثات = صفر

② ∵ ٨ جا ٤٠° = ب جا أ

∴ ب جا أ < أ < ب

∴ يمكننا رسم مثلثين

③ ∵ ٨ جا ٤٠° = ب جا أ

∴ أ < ب جا أ

∴ لا يمكن رسم المثلث

إرشادات التطبيقات الحياتية على الوحدة الرابعة

تطبيقات على الدرس الأول

١

∵ ق(∠ب) = ١٨٠° − (١٠٨° + ٥٢°) = ٢٠°

∴ أجـ / جا ٢٠° = ١٦٠ / جا ٥٢° = ب جـ / جا ١٠٨°

∴ أجـ = ٦٩ كم ، ب جـ = ١٩٣ كم

أى أن: المسافة بين أ ، جـ = ٦٩ كم

، المسافة بين ب ، جـ = ١٩٣ كم

٢

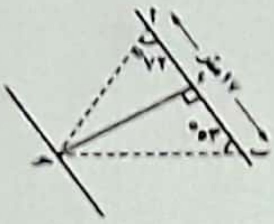
فى Δ أ ب جـ:

(١) ق(∠جـ) = ١٨٠° − (٥٣° + ٧٢°) = ٥٥°

∴ ١٧ / جا ٥٥° = أجـ / جا ٥٣° ∴ أجـ = ١٦٫٥٧ م

∴ المسافة بين العلامتين = ١٧ م

(٢) نسقط عمود من جـ على أب وليكن جـ ء



∴ فى Δ أ جـ ء:

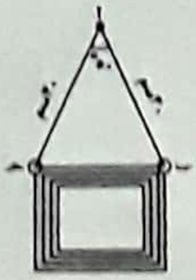
جـ ء / جا ٧٢° = ١٦٫٥٧ / جا ٩٠°

∴ جـ ء = ١٥٫٧٦ م

∴ المسافة بين حافتى الجدول = ١٥٫٧٦ م

تطبيقات على الدرس الثانى

١

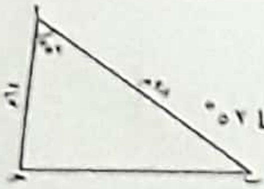


(ب جـ)^{2} = (٣٠)^{2} + (٣٠)^{2}

−٢ (٣٠) (٣٠) جتا ٥٠°

∴ ب جـ = ٢٥ سم

٢



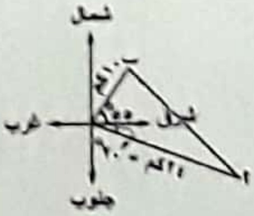
(ب جـ)^{2} = (٩٨)^{2} + (٦٤)^{2}

−٢ (٩٨) (٦٤) جتا ٥٢°

∴ ب جـ = ٧٧٫٣ م

∴ طول السياج = ٩٨ + ٦٤ + ٧٧٫٣ = ٢٣٩ م

٣



(أب)^{2} = (٢٤)^{2} + (١٠)^{2}

− ٢ (٢٤) (١٠) جتا ٧٥°

∴ أب = ٢٣٫٥ كم

٤

(أجـ)^{2} = (٩)^{2} + (١٥)^{2} − ٢ (٩) (١٥) جتا ١٢٠°

أجـ = ٢١ كم

، ∵ الزمن = المسافة / السرعة

، ن١ = ١٥/٣٦ × ٦٠ = ٢٥ دقيقة.

ن٢ = ٩/٣٦ × ٦٠ = ١٥ دقيقة.

ن٣ = ٢١/٤٢ × ٦٠ = ٣٠ دقيقة.

∴ الزمن الكلى = ٢٥ + ١٥ + ٣٠ = ٧٠ دقيقة.

٥

∵ المثمن منتظم

∴ قياس كل زاوية من زواياه = ١٣٥°

، ق(∠ب ع جـ) = ق(∠جـ ع ء) = ١٣٥° / ٦ = ٢٢٫٥°

∴ (ع ب)^{2} = (٦)^{2} + (٦)^{2} − ٢ (٦) (٦) جتا ١٣٥°

∴ ع ب = ١١٫١ متر

، (ع جـ)^{2} = (١١٫١)^{2} + (٦)^{2} − ٢ (١١٫١) (٦) جتا ١١٢٫٥°

∴ ع جـ = ١٤٫٥ متر

، (ع ء)^{2} = (١٤٫٥)^{2} + (٦)^{2} − ٢ (١٤٫٥) (٦) جتا ٩٠°

∴ ع ء = ١٥٫٧ متر

الجــزء الخــاص بالإجــابات

يُصــرف مجــانًا مع الكــتاب



الآن بالمكتبات

2

ثانوى

2020

المعاصر في:

- تطبيقات الرياضيات (علمى)
- الرياضيات العامة (أدبى)
- اللغــة الإنجليزية
- اللغــة الفرنسية

للصف الثانى الثانوى

5 321122 210104

/ElMoasser.eg

مكتبة الطلبة

للطبع و النشر و التوزيع

٣ شارع كامل صدقى - الفجالة

تليفون ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٢٥٩٣٤٠١٢ / ٠٢

e-mail: info@elmoasserbooks.com

www.elmoasserbooks.com